Aufgabe 1:

Gegeben sei folgendes Differentialgleichungssystem in der Ebene

$$\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{y}' = \begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{y}) = \begin{pmatrix} e^{(3\gamma+1)y_1} - y_2 - 1 \\ 5y_1 + e^{(3\gamma-1)y_2} - 1 \end{pmatrix}, \qquad \gamma \in \mathbb{R}\setminus\{0\}.$$

a) Untersuchen Sie den Gleichgewichtspunkt $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ auf Stabilität und bestimmen Sie seinen Typ (Knoten-, Wirbel-, oder Strudelpunkt) in Abhängigkeit vom Parameter $\gamma \in \mathbb{R}$, $\gamma \neq 0$.

b) Bestimmen Sie für den Fall $\gamma = -1$ eine reelle Darstellung der allgemeinen Lösung des Systems

$$\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{A}\,\boldsymbol{y}, \qquad \boldsymbol{A} = \boldsymbol{J}\,\boldsymbol{f}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

also eine reelle Darstellung der allgemeinen Lösung des Systems

$$\boldsymbol{y}' = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 5 & -4 \end{pmatrix} \boldsymbol{y}.$$

Hinweis: Sie dürfen die in Teil a) berechneten Formeln für die Eigenwerte verwenden.

Lösungshinweise zu Aufgabe 1:

a)

$$\boldsymbol{J}\,\boldsymbol{f}(y_1, y_2) = \begin{pmatrix} (3\gamma+1)e^{(3\gamma+1)y_1} & -1 \\ 5 & (3\gamma-1)e^{(3\gamma-1)y_2} \end{pmatrix}, \qquad \textbf{[1 Punkt]}$$

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{J}\,\boldsymbol{f}(0,0) = \begin{pmatrix} (3\gamma+1) & -1 \\ 5 & (3\gamma-1) \end{pmatrix}, \qquad \textbf{[1 Punkt]}$$

$$\begin{aligned} \det(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{E}) &= \det \begin{pmatrix} 3\gamma+1-\lambda & -1 \\ 5 & 3\gamma-1-\lambda \end{pmatrix} = (3\gamma+1-\lambda)(3\gamma-1-\lambda)+5 \\ &= (3\gamma-\lambda)^2 - 1^2 + 5 = 0 \\ &\iff (3\gamma-\lambda)^2 = -4 \iff 3\gamma - \lambda = \pm 2i \\ &\iff \lambda_{1,2} = 3\gamma \mp 2i. \qquad \textbf{[2 Punkte]} \end{aligned}$$

Der Nullpunkt ist also

im Fall $\gamma > 0$ instabiler Strudelpunkt,

im Fall $\gamma < 0$ stabiler Strudelpunkt. **[1 Punkt]**

b) Nach Teil a) erhält man für $\gamma = -1$ die Eigenwerte
$\lambda_{1,2} = 3\gamma \mp 2i = -3 \mp 2i\,.$ **[1 Punkt]**
Für $\lambda_1 = -3+2i$ berechnet man einen Eigenvektor als Lösung des Systems

$$\begin{pmatrix} 1-2i & -1 \\ 5 & -1-2i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \textbf{[1 Punkt]}$$

Die erste Gleichung liefert $(1-2i)v_1 - v_2 = 0 \iff v_2 = (1-2i)v_1$. Die zweite Gleichung liefert keine zusätzliche Bedingung.

Eine komplexe Lösung ist also $\boldsymbol{z}\,(t) = e^{(-3+2i)t}\begin{pmatrix} 1 \\ 1-2i \end{pmatrix}$. **[1 Punkt]**

Real- und Imaginärteil von $\boldsymbol{z}$ liefern ein reelles Fundamentalsystem.

$$\begin{aligned} \boldsymbol{z}(t) &= e^{-3t}(\cos(2t) + i\sin(2t)) \begin{pmatrix} 1 \\ 1-2i \end{pmatrix} \\ &= e^{-3t} \begin{pmatrix} \cos(2t) + i\sin(2t) \\ \cos(2t) + i\sin(2t) - 2i\cos(2t) + 2\sin(2t) \end{pmatrix}, \qquad \textbf{[1 Punkt]} \end{aligned}$$

$$\hat{\boldsymbol{y}}\,(t) = e^{-3t} \begin{pmatrix} \cos(2t) \\ \cos(2t) + 2\sin(2t) \end{pmatrix}, \; \tilde{\boldsymbol{y}}\,(t) = e^{-3t} \begin{pmatrix} \sin(2t) \\ \sin(2t) - 2\cos(2t) \end{pmatrix}. \qquad \textbf{[1 Punkt]}$$

Allgemeine Lösung: $\boldsymbol{y}\,(t) = c_1\,\hat{\boldsymbol{y}}\,(t) + c_2\,\tilde{\boldsymbol{y}}\,(t)\,, \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}\,.$

Aufgabe 2:

Gegeben sei die Randwertaufgabe

$$\begin{aligned} y_1' - y_1 &= h_1(x) \\ y_2' - 4y_1 + y_2 &= h_2(x) \end{aligned} \quad \text{für } x \in (0, b)$$

$$\begin{aligned} -2y_1(0) + y_2(0) + 4y_1(b) &= d_1 \\ y_2(b) &= d_2 \end{aligned}$$

mit stetigen Funktionen h_1 und h_2 und Konstanten d_1, d_2 und $b \in \mathbb{R}$ mit $b > 0$.

a) Schreiben Sie die Randwertaufgabe in Matrixschreibweise um.

b) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der homogenen Differentialgleichung und geben Sie eine zugehörige Fundamentalmatrix an.

c) Bestimmen Sie, für welche $b > 0$ die Randwertaufgabe eindeutig lösbar ist.

d) Geben Sie für $b = \ln 2$ zwei verschiedene Lösungen $y^{(1)}$ und $y^{(2)}$ der homogenen Randwertaufgabe, das heißt für $h_1(x) = h_2(x) = 0$ und $d_1 = d_2 = 0$, an.

Lösung:

a) [**2 Punkte**]

$$\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{y}' = \begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} h_1(x) \\ h_2(x) \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(b) \\ y_2(b) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix}.$$

b) [**3 Punkte**]

Eigenwerte der Systemmatrix: direkt ablesbar

$$\lambda_1 = 1, \qquad \lambda_2 = -1.$$

Eigenvektoren: $\lambda_1 = 1$, $\quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \boldsymbol{v} = k \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\lambda_2 = -1$, $\quad \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \boldsymbol{v} = K \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\boldsymbol{y}_h = c_1 e^x \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + c_2 e^{-x} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Fundamentalmatrix: $\boldsymbol{Y}(x) = \begin{pmatrix} e^x & 0 \\ 2e^x & e^{-x} \end{pmatrix}$.

c) **[2 Punkte]**

$$\boldsymbol{E} \;=\; \boldsymbol{B}_0 \boldsymbol{Y}(0) \;+\; \boldsymbol{B}_b \boldsymbol{Y}(b) = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^b & 0 \\ 2e^b & e^{-b} \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{E} \;=\; \begin{pmatrix} 4e^b & 1 \\ 2e^b & e^{-b} \end{pmatrix} \Longrightarrow \det\,(\,\boldsymbol{E}\,) \;=\; 4 - 2e^b\,.$$

Die Determinante verschwindet genau dann, wenn

$$e^b \;=\; 2 \iff b = \ln(2)$$

gilt. Für alle anderen Werte von b ist die Randwertaufgabe für alle stetigen Funktionen h_1 und h_2 und alle Konstanten d_1, d_2 und $b \in \mathbb{R}$ eindeutig lösbar.

d) **[3 Punkte]**

Zu lösen ist:

$$\boldsymbol{y}_h \;=\; c_1\, e^x \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \;+\; c_2\, e^{-x} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$-2y_1(0) + y_2(0) + 4y_1(\ln(2)) = 0\,,\ \text{und}\ \ y_2(\ln(2)) = 0$$

$$\iff -2c_1 \;+\; 2c_1 \;+\; c_2 \;+\; 8c_1 = 0\ ,\ \text{und}\ \ 4c_1 \;+\; 0.5c_2 = 0$$

$$\iff c_2 \;+\; 8c_1 = 0\ ,\ \text{und}\ \ 4c_1 \;+\; 0.5c_2 = 0\,.$$

Eine Lösung der homogenen Aufgabe ist die Nulllösung, eine weiter Lösungen erhält man für $c_2 = -8c_1$. Zum Beispiel $c_1 = 1$ und $c_2 = -8$ also

$$\boldsymbol{y}\,(x) = \begin{pmatrix} e^x \\ 2e^x - 8e^{-x} \end{pmatrix}.$$