Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. H. J. Oberle

SoSe 2013

Klausur zur Mathematik III

(Modul: Differentialgleichungen I)

15. August 2013

Sie haben 60 Minuten Zeit zum Bearbeiten der Klausur.

Bitte kennzeichnen Sie jedes Blatt mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer.

Tragen Sie bitte zunächst Ihren Namen, Ihren Vornamen und Ihre Matrikelnummer in **DRUCKSCHRIFT** in die folgenden jeweils dafür vorgesehenen Felder ein.

Diese Eintragungen werden auf Datenträger gespeichert.

Name:																
Vorname:																
Matr.-Nr.:																

Stg:	AIW	BU	CI	ET	GES	IIW	LUM	MB	MTB	SB	BVT	EUT	VT	

Wertung nach DPO : zus. mit Analysis III ☐ Einzelwertung ☐

Ich bin darüber belehrt worden, dass die von mir zu erbringende Prüfungsleistung nur dann bewertet wird, wenn die Nachprüfung durch das Zentrale Prüfungsamt der TUHH meine offizielle Zulassung vor Beginn der Prüfung ergibt.

(Unterschrift)

Lösen Sie die **2** angegebenen Aufgaben. Pro Aufgabe werden 10 Punkte vergeben.

Aufg.	Punkte	Korrekteur
1		
2		

$\sum =$

Aufgabe 1:

Gegeben sei folgendes Differentialgleichungssystem in der Ebene

$$\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{y}' = \begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{y}) = \begin{pmatrix} e^{(3\gamma+1)y_1} - y_2 - 1 \\ 5y_1 + e^{(3\gamma-1)y_2} - 1 \end{pmatrix}, \qquad \gamma \in \mathbb{R}\setminus\{0\}\,.$$

a) Untersuchen Sie den Gleichgewichtspunkt $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ auf Stabilität und bestimmen Sie seinen Typ (Knoten-, Wirbel-, oder Strudelpunkt) in Abhängigkeit vom Parameter $\gamma \in \mathbb{R}$, $\gamma \neq 0$.

b) Bestimmen Sie für den Fall $\gamma = -1$ eine reelle Darstellung der allgemeinen Lösung des Systems

$$\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{A}\,\boldsymbol{y}, \qquad \boldsymbol{A} = \boldsymbol{J f}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

also eine reelle Darstellung der allgemeinen Lösung des Systems

$$\boldsymbol{y}' = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 5 & -4 \end{pmatrix} \boldsymbol{y}\,.$$

Hinweis: Sie dürfen die in Teil a) berechneten Formeln für die Eigenwerte verwenden.

Aufgabe 2:

Gegeben sei die Randwertaufgabe

$$\begin{aligned} y_1' - y_1 &= h_1(x) \\ y_2' - 4y_1 + y_2 &= h_2(x) \\ -2y_1(0) + y_2(0) + 4y_1(b) &= d_1 \\ y_2(b) &= d_2 \end{aligned} \qquad \text{für } x \in (0, b)$$

mit stetigen Funktionen h_1 und h_2 und Konstanten d_1, d_2 und $b \in \mathbb{R}$ mit $b > 0$.

a) Schreiben Sie die Randwertaufgabe in Matrixschreibweise um.

b) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der homogenen Differentialgleichung und geben Sie eine zugehörige Fundamentalmatrix an.

c) Bestimmen Sie, für welche $b > 0$ die Randwertaufgabe eindeutig lösbar ist.

d) Geben Sie für $b = \ln 2$ zwei verschiedene Lösungen $y^{(1)}$ und $y^{(2)}$ der homogenen Randwertaufgabe, das heißt für $h_1(x) = h_2(x) = 0$ und $d_1 = d_2 = 0$, an.

Viel Erfolg!