Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **WiSe 2012/13**
Prof. Dr. H. J. Oberle
Dr. H. P. Kiani

Differentialgleichungen I für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Blatt 6, Hausaufgaben

Aufgabe 1:

Gegeben ist die Randwertaufgabe

$$\begin{aligned} {y_1}'(t) \;-\; y_1(t) \;+\; y_2(t) \;&=\; t\,, \\ {y_2}'(t) \;-\; 4y_1(t) \;+\; 3y_2(t) \;&=\; 4\,, \\ 2y_1(0) - \exp(1)y_1(1) \;&=\; d_1\,, \\ y_2(0) + \alpha\exp(1)y_2(1) \;&=\; d_2 \end{aligned}$$

mit den Konstanten d_1, $d_2 \in \mathbb{R}$.

a) Formulieren Sie die Aufgabe in Matrixschreibweise.

b) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des homogenen Differentialgleichungssystems.

c) Bestimmen Sie eine partikuläre Lösung des inhomogenen Differentialgleichungssystems mit Hilfe des Ansatzes

$$\boldsymbol{y}_p(t) = \begin{pmatrix} at+b \\ ct+d \end{pmatrix} \qquad a,\, b,\, c,\, d \in \mathbb{R}.$$

d) Für welche Werte von $\alpha \in \mathbb{R}$ ist die Randwertaufgabe für beliebige Konstanten d_1, $d_2 \in \mathbb{R}$ eindeutig lösbar?

Aufgabe 2:

a) Gegeben sei die Variationsaufgabe

Minimiere $\quad I[y] \;=\; \int_0^2 (y'(t))^2 \;-\; 4(y(t)+t)y'(t) + 9y(t)^2\,dt$

unter der Nebenbedingung $y(2) \;=\; 1$.

(i) Stellen Sie die Euler–Lagrange Gleichung des Variationsproblems auf und geben Sie die natürliche Randbedingung an.

(ii) Bestimmen Sie die Lösung y_0 der in i) erhaltenen Randwertaufgabe.

(iii) Zeigen Sie durch direkte Auswertung von $I[y_0 + \epsilon z]$ mit einer Funktion $z \in C^1[0,2]$, die die homogenen Randbedingungen der Aufgabe aus ii) erfüllt, dass y_0 tatsächlich das Funktional I (lokal) minimiert.

b) Bestimmen Sie mit Hilfe der Hamilton-Funktion eine C^1–Funktion $y_0 \in \mathrm{C}^1[0,1]$ mit $y_0(0) = 0$ und $y_0(1) = 1$, die das Funktional

$$I[y] := \int_0^1 \frac{(y')^2}{2} - y\,dt$$

minimiert und berechnen Sie den minimalen Wert des Zielfunktionals.

Welche Lösung und welchen Wert für das Zielfunktional erhält man, wenn die Randbegingung $y_0(1) = 1$ fehlt?

Abgabetermine: 21.01.-25.01.2013