Aufgabe 1)

a) Gegeben ist die Randwertaufgabe

$$x^2y'' - 3x\,y' + 3y = h(x) \qquad x \in]1,2[$$

$$y(1) + y'(1) = \gamma_1$$
$$y(2) + \alpha y'(2) = \gamma_2 \qquad \alpha, \gamma_1, \gamma_2 \in \mathbb{R}\,.$$

(i) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der homogenen Differentialgleichung

$$x^2y'' - 3x\,y' + 3y = 0 \qquad x \in]1,2[$$

mit Hilfe des Ansatzes $y(x) = x^k$.

(ii) Für welche Werte von α ist die Randwertaufgabe für beliebige $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathbb{R}$ und beliebige auf dem Intervall $[1,2]$ stetige Funktionen $h(x)$ eindeutig lösbar?

b) Gegeben ist die inhomogene Differentialgleichung

$$y'(x) = \cos(x)\,y(x) + x\,e^{\sin(x)}$$

(i) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der zugehörigen homogenen Differentialgleichung.

(ii) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung mittels Variation der Konstanten.

Aufgabe 2: Gegeben ist das Variationsproblem: Minimiere das Funktional

$$I[y] := \int_0^2 e^{-2t}\left((y')^2 - y^2\right) + 6ty'\,dt$$

unter allen C^1-Funktionen $y = y(t)$ mit $y(0) = -1$.

a) Stellen Sie die zugehörige Euler-Lagrange-Gleichung auf, und geben Sie die natürliche Randbedingung an.

b) Lösen Sie die sich aus Teil a) ergebende Randwertaufgabe.