Aufgabe 1) Gegeben sei das lineare System

$$\boldsymbol{y}\,'(t) \;=\; A\,\boldsymbol{y}\,(t) \;=\; \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & \gamma & 2 & 3 \\ -1 & 0 & \gamma & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \;\boldsymbol{y}\,(t)\,.$$

a) Untersuchen Sie das Stabilitätsverhalten des stationären Punktes $(0,0,0,0)^T$ in Abhängigkeit vom Parameter $\gamma \in \mathbb{R}$.

b) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des Systems für $\gamma \;=\; 0$.

Lösungsskizze zur Aufgabe 1)

a) Entwicklung nach der zweiten Spalte ergibt das Charkteristisches Polynom:

$$P(\lambda) = (\gamma - \lambda) \;\; \det \begin{pmatrix} -1-\lambda & 0 & 2 \\ -1 & \gamma - \lambda & 0 \\ -1 & 0 & -4-\lambda \end{pmatrix}$$

$$= (\gamma - \lambda)^2[(-1-\lambda)(-4-\lambda)+2]\,.$$

$$= (\gamma - \lambda)^2(\lambda^2 + 5\lambda + 6) \;=\; (\gamma - \lambda)^2(\lambda + 2)(\lambda + 3)$$

Eigenwerte : $\lambda_1 = \lambda_2 = \gamma, \quad \lambda_3 = -2 \quad \lambda_4 = -3$ **[2 Punkte]**

$\gamma < 0 \iff$ Realteil aller Eigenwerte $< 0 \implies$ (asymp.) stabil **[1 Punkt]**

$\gamma > 0 \iff \lambda_1 > 0$: instabil **[1 Punkt]**

$\gamma = 0 \implies \lambda_1 = 0,\, \lambda_2 = 0$

Eigenraum zum doppelten EW Null:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff v_4 = v_3 = v_1 = 0$$

Einzige Eigenvektorrichtung:

$$v^{[1]} := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

Der Eigenraum des algebraisch zweifachen Eigenwertes Null hat die Dimension eins. Die Nulllösung ist instabil. **[2 Punkte]**

b) Hauptvektor zum Eigenwert Null:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff w_4 = w_1 = 0\,, w_3 = 0.5$$

Hauptvektor zum Beispiel:

$$W = v^{[2]} := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.5 \\ 0 \end{pmatrix}. \qquad \textbf{[1 Punkt]}$$

Eigevektor zum EW $\lambda_3 = -2$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Erste und vierte Zeile: $v_4 = -\frac{1}{2}v_1$

Dritte Zeile: $v_3 = \frac{1}{2}v_1$

Zweite Zeile: $v_1 + 2v_2 + v_1 - \frac{3}{2}v_1 = 0 \iff v_2 = -\frac{1}{4}v_1$

Wir können also als Eigevektor zum EW $\lambda_3 = -2$ den Vektor

$v^{[3]} := \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ wählen. **[1 Punkt]**

Eigevektor zum EW $\lambda_4 = -3$:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Erste und vierte Zeile: $v_4 = -v_1$

Dritte Zeile: $v_3 = \frac{1}{3}v_1$

Zweite Zeile: $v_1 + 3v_2 + \frac{2}{3}v_1 - 3v_1 = 0 \iff v_2 = \frac{4}{9}v_1$

Wir können also als Eigevektor zum EW $\lambda_4 = -3$ den Vektor

$v^{[4]} := \begin{pmatrix} 9 \\ 4 \\ 3 \\ -9 \end{pmatrix}$ wählen. **[1 Punkt]**

Die allgemeine Lösung ist

$$\boldsymbol{y}(t) = c_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ t \\ 0.5 \\ 0 \end{pmatrix} + c_3 e^{-2t} \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} + c_4 e^{-3t} \begin{pmatrix} 9 \\ 4 \\ 3 \\ -9 \end{pmatrix} \qquad \textbf{[1 Punkt]}$$

Aufgabe 2)

a) Gegeben sei die Anfangswertaufgabe

$$y'' - 2y' + y = \sin(4t) + te^{-t}\,, \text{ für } t > 0\,, \qquad y(0) = 1\,, \; y'(0) = 0\,.$$

In welche algebraische Gleichung läßt sich die Anfangswertaufgabe durch die Laplace-Transformation überführen?

Bitte belegen Sie Ihre Antwort durch Zwischenrechnungen.

b) Es sei $F(s) = \dfrac{1}{s(s-1)^2}$ die Laplace-transformierte der Funktion

$$f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, \quad f : t \mapsto f(t)\,.$$

Bestimmen Sie $f(t)$.

Lösung:

a) $y \bullet\!\!-\!\!\circ\, Y, \qquad y' \bullet\!\!-\!\!\circ\, sY - y(0) = sY - 1,$ **[1 Punkt]**

$y'' \bullet\!\!-\!\!\circ\, s^2Y - s - y'(0) = s^2Y - s,$ **[1 Punkt]**

$\sin(4t) \bullet\!\!-\!\!\circ\, \dfrac{4}{s^2+16}, \qquad t \bullet\!\!-\!\!\circ\, \dfrac{1}{s^2}, \qquad e^{-t}t \bullet\!\!-\!\!\circ\, \dfrac{1}{(s+1)^2}\,.$ **[2 Punkte]**

Die AWA geht über in

$$(s^2 - 2s + 1)Y + 2 - s = \frac{4}{s^2+16} + \frac{1}{(s+1)^2}\,.$$ **[1 Punkt]**

b) Der PBZ-Ansatz

$$\frac{as+b}{s^2-2s+1} + \frac{c}{s} = \frac{1}{s(s-1)^2}$$ **[1 Punkt]**

liefert

$cs^2 - 2cs + c + as^2 + bs = 1 \iff c = -a\,,\; 2c = b\,,\; c = 1\,.$ **[1 Punkt]**

$$\frac{2-s}{(s-1)^2} + \frac{1}{s} = \frac{1}{(s-1)^2} - \frac{s-1}{(s-1)^2} + \frac{1}{s}$$ **[1 Punkt]**

$$= \frac{1}{(s-1)^2} - \frac{1}{s-1} + \frac{1}{s} \;\circ\!\!-\!\!\bullet\; te^t - e^t + 1\,.$$ **[2 Punkte]**