Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **WiSe 2010/11**
Prof. Dr. H. J. Oberle
Dr. H. P. Kiani

Differentialgleichungen I für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Blatt 5

Aufgabe 1:

a) Untersuchen Sie den stationären Punkt $(0,0)^T$ des linearen Systems $\boldsymbol{y}' = A\,\boldsymbol{y}$ auf Stabilität und bestimmen Sie seinen Typ (Knoten, Wirbel, Strudel, etc.) für

i) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, **ii)** $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$, **iii)** $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

b) (Klausur 08/09, Hinze/Kiani) Gegeben sei das lineare System

$$\boldsymbol{y}' = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 3 \\ -1 & -\gamma & 1 \\ 3 & 0 & -3 \end{pmatrix} \boldsymbol{y}\,.$$

Untersuchen Sie das Stabilitätsverhalten des stationären Punktes $(0,0,0)^T$ in Abhängigkeit vom Parameter $\gamma \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 2:

a) Die Van-der-Pol-Gleichung

$$x'' - \epsilon\,(1 - x^2)\,x' + x = 0\,, \qquad \epsilon \in \mathbb{R}^+$$

beschreibt das Verhalten eines Van-der-Pol-Oszillators. Es handelt sich um einen Oszillator mit nichtlinearer Dämpfung und Selbsterregung. Für kleine Auslenkungen x ist die Dämpfung negativ, und für große Auslenkungen ist die Dämpfung positiv. Es gibt keine geschlossene Lösung. Untersuchen Sie die Gleichgewichtslösung $x = 0$ auf Stabilität.

b) (Klausur 06/07, Oberle/Kiani) Gegeben sei das Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned} y_1' &= y_1^2\,y_2 + y_2^3 - 2y_1\,y_2^2 \\ y_2' &= -\,y_1^3 - y_1\,y_2^2\,. \end{aligned}$$

Untersuchen Sie den Gleichgewichtspunkt $y_1^* = y_2^* = 0$ des Systems auf Stabilität. Verwenden Sie gegebenenfalls eine Funktion der Form

$$V(y_1, y_2) = ay_1^2 + by_2^2\,.$$

Aufgabe 3: Lösen Sie die folgenden Anfangswertaufgaben mit Hilfe der Laplace Transformation.

a) $y'' + y = e^{-t} \sin(2t)\,, \qquad y(0) = \alpha,\ y'(0) = \beta\,.$

b) $y'' + 9y = h_1(t) - h_2(t)\,, \qquad y(0) = y'(0) = 0\,.$

c) $y'' + \dfrac{\pi^2}{4}\, y = \dfrac{\pi}{2}\, [\delta(t-1) - \delta(t-3)]\,, \quad y(0) = 0,\ y'(0) = 0\,,$

wobei $\delta(t)$ die Diracsche Delta Distribution sei.

Skizzieren Sie die Lösungen Teil b und Teil c mit Hilfe eines (Taschen-)Rechners.

Aufgabe 4:

Lösen Sie die folgende Anfangswertaufgabe mit Hilfe der Laplace Transformation:

$$\begin{aligned} U'' - 2(V - U) &= 1\,, \qquad & U(0) = V(0) &= 0\,, \\ V'' + 2(V - U) &= 0\,, \qquad & U'(0) = V'(0) &= 1. \end{aligned}$$

Abgabetermine: 10-14.01.2011