Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **WiSe 2010/11**
Prof. Dr. H. J. Oberle
Dr. H. P. Kiani

Differentialgleichungen I für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Blatt 3

Aufgabe 1:

a) Ermitteln Sie mit Hilfe der Substitution $u(x) := y'(x)$ die allgemeine Lösung der folgenden Differentialgleichung zweiter Ordnung:

$$(x^4 - 1) \cdot y''(x) = 4x^3 \cdot (y'(x) - 2) .$$

b) Gegeben sei die Differentialgleichung aus Teil a).

(i) Ermitteln Sie die Lösung der zugehörigen Anfangswertaufgabe mit den Anfangswerten
$$y(0) = 1 , \qquad y'(0) = 3 .$$

(ii) Seien nun die Anfangswerte
$$y(1) = 0 , \qquad y'(1) = 2 ,$$
bzw.
$$y(1) = 0 , \qquad y'(1) = 1 .$$
vorgegeben. Können Sie eine eindeutige Lösung angeben? Wie vertragen sich Ihre Ergebnisse mit den Existenz– und Eindeutigkeitssätzen aus der Vorlesung?

Aufgabe 2: Gegeben sei die Anfangswertaufgabe

$$y' = t^2 (y - 1), \qquad y(0) = 2.$$

a) Bestimmen Sie mit Hilfe des Eulerschen Polygonzug-Verfahrens mit der Schrittweite $h = 0.25$ eine Näherung für $y(1)$.

b) Führen Sie zwei Schritte des Verfahrens der sukzessiven Approximation aus. Welchen Wert hat $y^{[2]}(t)$ an der Stelle $t = 1$?

c) Lösen Sie die gegebene Anfangswertaufgabe analytisch und werten Sie die exakte Lösung (mit Hilfe eines Taschenrechners) an der Stelle $t = 1$ aus.

Aufgabe 3:
Gegeben sei die parameterabhängige skalare Anfangswertaufgabe

$$\dot{y}\,(t; t_0, y_0, \epsilon) \;=\; f(t, y(t; t_0, y_0, \epsilon), \epsilon), \qquad y(t_0; t_0, y_0, \epsilon) = y_0\,.$$

a) Nehmen Sie an, dass die Lösungen für alle (t_0, y_0, ϵ) aus einem geeigneten Gebiet G mindestens C^2–Funktionen sind. Zeigen Sie, dass die Variation

$$\omega(t) \;:=\; \frac{\partial y(t; t_0, y_0, \epsilon)}{\partial \epsilon}$$

eine Lösung der Anfangswertaufgabe

$$\dot{\omega}(t) \;=\; f_y(t, y\,(t; t_0, y_0, \epsilon), \epsilon)\;\omega(t) \;+\; f_\epsilon(t, y(t; t_0, y_0, \epsilon), \epsilon)\,, \qquad \omega(t_0) \;=\; 0$$

ist.

b) Die Anfangswertaufgabe

$$\dot{y} \;=\; y \;+\; \epsilon\, y^3 \;+ 1\,, \qquad y(0) = 1\,,$$

ist für $\epsilon = 0$ sehr einfach zu lösen. Für $\epsilon \neq 0$ wird Ihnen eine analytische Berechnung der Lösung kaum möglich sein. Berechnen Sie zur Approximation der Lösung für kleine $|\epsilon|$ das Taylorpolynom ersten Grades zur Funktion $y(t; t_0, y_0, \epsilon)$ bei Entwicklung nach ϵ mit dem Entwicklungspunkt $\epsilon_0 = 0$.

c) (Freiwillige Zusatzaufgabe) Vergleichen Sie grafisch für $\epsilon = 0.1$ und $t \in [0, 0.75]$ die Approximation aus Teil b) mit der von ode45 gelieferten Lösung.

Aufgabe 4:
Gegeben ist die Anfangswertaufgabe

$$\boldsymbol{y}\,' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{3}{x^2} & \frac{1}{x} \end{pmatrix} \boldsymbol{y}\;, \qquad x \geq 0.5\,.$$

a) Zeigen Sie, dass durch $\boldsymbol{y}\,(x) = \begin{pmatrix} x^3 \\ 3x^2 \end{pmatrix}$ eine Lösung der Differentialgleichung gegeben ist.

b) Bestimmen Sie ein Fundamentalsystem für den Lösungsraum der Differentialgleichung.

c) Bestimmen Sie die Lösung der zugehörigen Anfangswertaufgabe mit den Anfangswerten $\boldsymbol{y}\,(1) = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Abgabetermine: 29.11.-03.12.2010