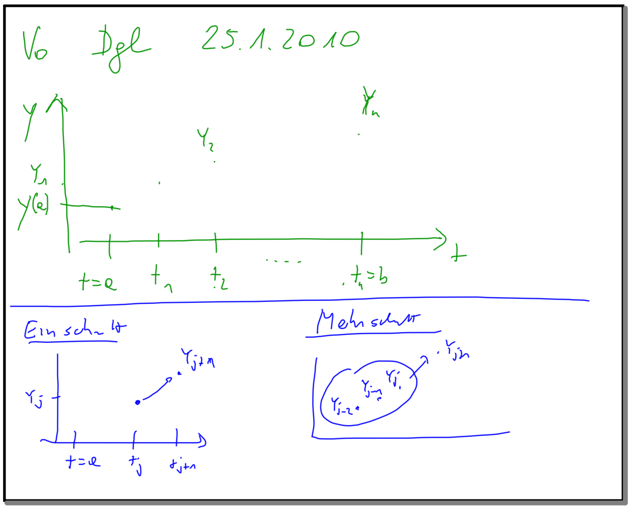
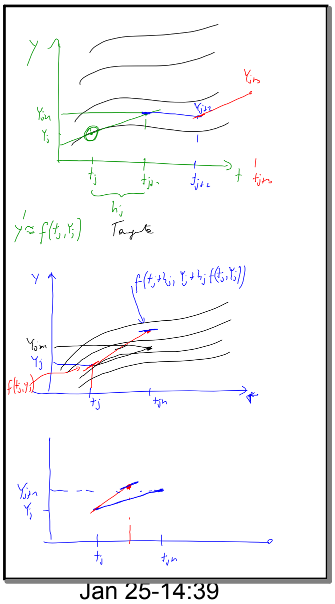
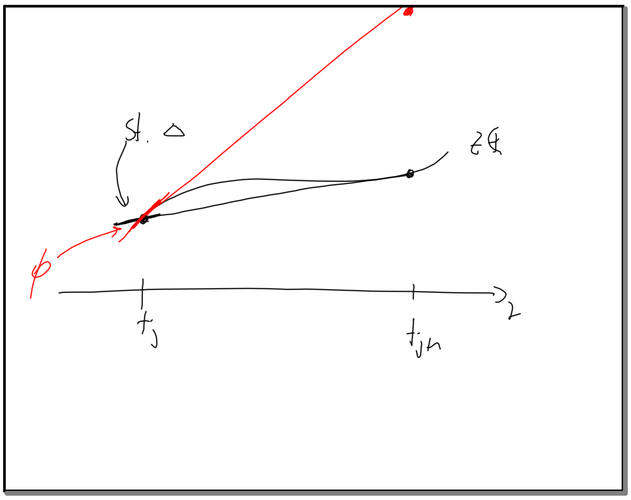


Jan 25-14:16



Jan 25-14:39



Jan 25-14:59

Definition: (Fortsetzung)

3) Das Einschrittverfahren heißt **konsistent**, falls für alle hinreichen oft stetig differenzierbaren rechten Seiten $f(t, y)$ gitl:

$$\lim_{h \to 0} \tau(t_j, Y_j, h) = 0$$

Das Einschrittverfahren besitzt die **Ordnung** p, falls gilt:

$$\tau(t_j, Y_j, h) = O(h^p)$$

d.h.

$$\exists C, h_0 > 0 \ : \ \forall h \in (0, h_0] \ : \ |\tau(t_j, Y_j, h)| \le Ch^p$$

Bemerkung: Man kann den lokalen Diskretisierungsfehler auch als

$$\tau(t_j, Y_j, h) = \frac{1}{h}(z(t_{j+1}) - Y_{j+1}) = \frac{1}{h}(z(t_{j+1}) - Y_j) - \frac{Y_{j+1} - Y_j}{h}$$

darstellen, d.h. τ ist der Integrationsfehler pro Schrittweite.

Jan 25-15:03

Bestimmung der Konsistenzordnung:

Man verwendet dazu die Taylor–Entwicklung von $z(t + h)$ um $h = 0$

$$z(t + h) = z(t) + z'(t)h + z''(t)\frac{h^2}{2} + \dots$$

Nun gilt neben $z(t) = Y$ $\quad f = f(t, y)$

$$\begin{aligned} z'(t) &= f(t, z(t)) \\ z''(t) &= f_t(t, z) + f_y(t, z)z' = f_t(t, z) + f_y(t, z)f(t, z) \\ z^{(3)}(t) &= f_{tt} + 2f_{ty}f + f_{yy}f^2 + f_t f_y + f_y^2 \cancel{d}\, f \end{aligned}$$

Wir erhalten daher für $\Delta(t, y, h) = (z(t + h) - Y)/h$ den Ausdruck $\quad z(t) = Y$

$$\Delta = f + \frac{h}{2}(f_t \overset{+}{} f_y f) + \frac{h^2}{6}(f_{tt} + 2f_{ty}f + f_{yy}f^2 + f_t f_y + f_y^2 d) + O(h^3)$$

$$= \frac{\cancel{z(t)} + hf + \frac{h^2}{2}(f_t + f_y f) + \dots) - \cancel{Y}}{h}$$

Jan 25-15:10

Beispiel:

1) Beim Euler–Verfahren gilt $\Phi = f(t, Y)$ und daher

$$\tau = \Delta - \Phi = f + \frac{h}{2}(f_t \overset{+}{} f_y f) + O(h^2) - \Phi = \frac{h}{2}(f_t \overset{+}{} f_y f) + O(h^2)$$

Das Verfahren ist also konsistent erster Ordnung.

2) Beim Verfahren von Heun gilt

$$\begin{aligned} \Phi &= \frac{1}{2}(f(t, Y) + f(t + h, Y + hf(t, Y)) \\ &= \frac{1}{2}\left(f(t, Y) + f(t, Y) + \frac{h}{\cancel{2}}(f_t(t, Y) + f_y(t, Y)f(t, Y)) + O(h^2)\right) \end{aligned}$$

Daraus folgt $\quad = f + \frac{h}{2}(f_t + f_y f) + O(h^3)$

$$\tau = \Delta - \Phi = O(h^2)$$

Das Heun–Verfahren ist ein konsistentes Verfahren zweiter Ordnung.

Jan 25-15:14

Implizit Euler

$$\frac{Y_{j+1} - Y_j}{h_j} \approx f(t_j, Y_j) \quad \text{explizit}$$

$$Y_{j+1} = Y_j + h_j\, f(t_j, Y_j)$$

$$\frac{Y_{j+1} - Y_j}{h_j} \approx f(t_{j+1}, Y_{j+1}) \quad \text{implizit}$$

$$\underline{Y_{j+1}} = Y_j + h_j\, f(t_{j+1}, \underline{Y_{j+1}})$$

Jan 25-15:32