Vo Dgl 18.1.2010

Jan 18-14:15

3.4 Die Laplace–Transformation

Sei $F : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ eine reell– oder komplexwertige Funktion auf $\mathbb{R}$. Unter der **Laplace–Transformierten** von F versteht man die Integraltransformation

(6) $$f(s) := \int_0^\infty e^{-st} F(t)\,dt$$

$f = \mathcal{L}[F]$

$f(s) = \mathcal{L}[F](s)$

wobei $s \in \mathbb{C}$ eine komplexe Zahl ist.

Frage: Für welche Funktionen $F(t)$ existiert das uneigentliche Integral? Schreiben wir die komplexe Zahl s als

$$s = \sigma + i\omega$$

so folgt

$$f(s) := \int_0^\infty e^{-\sigma t}(\cos(\omega t) + i\sin(\omega t))F(t)\,dt$$

Jan 18-14:26

$F(t) = e^{\sigma_0 t}$

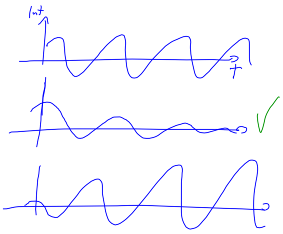
$$f(s) = \int_0^\infty e^{-st} e^{\sigma_0 t}\,dt = \int_0^\infty e^{-(\mathrm{Re}\, s - \sigma_0)t} \underbrace{e^{-i\,\mathrm{Im}\, s\, t}}_{\cos(\mathrm{Im}\, s\, t) + i \sin(\mathrm{Im}\, s\, t)}\,dt =$$

$$\int_0^\infty = \lim_{T\to\infty} \int_0^T$$

$\mathrm{Re}\, s - \sigma_0 = 0$

$\mathrm{Re}\, s - \sigma_0 > 0$

$\mathrm{Re}\, s - \sigma_0 < 0$



$$\left|\int_0^\infty e^{-(\mathrm{Re}\, s - \sigma_0)t} \cos(\dots t)\,dt\right| \le \underbrace{\int_0^\infty e^{-(\mathrm{Re}\, s - \sigma_0)t}\,dt}_{\exists\ \mathrm{Re}\, s - \sigma_0 > 0}$$

Jan 18-14:28

Notationen und Bezeichnungen:

Sei $F(t)$ eine reell– oder komplexwertige Funktion, für die die Laplace–Transformierte $f(s)$ existiert.

1) Wir schreiben auch: $f = \mathcal{L}[F]$
2) Das **Doetsch–Symbol** lautet $\circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet$:

$$F \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet f \quad \text{oder} \quad f \bullet\!\!-\!\!\!-\!\!\circ F$$

3) Eine Beziehung

$$f = \mathcal{L}[F] \quad \text{bzw.} \quad F \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet f$$

nennt man eine **Korrespondenz**, die Zuordnung $F \to f$ heisst **Laplace–Transformation**.

4) Die Laplace–Transformation ist **linear**, d.h.

$$\mathcal{L}[\alpha F + \beta G] = \alpha\mathcal{L}[F] + \beta\mathcal{L}[G]$$

$$\int_0^\infty e^{-st}(\alpha F(t) + \beta G(t))\,dt = \alpha \int_0^\infty e^{-st} F(t)\,dt + \beta \int_0^\infty e^{-st} G(t)\,dt$$

Jan 18-14:36

Beispiele:

1) Wir betrachten die **Heaviside–Funktion**

$$H(t) := \begin{cases} 0 & : \ t < 0 \\ 1 & : \ t \ge 0 \end{cases}$$

Die Laplace–Transformierte lautet demnach

$$f(s) = \int_0^\infty e^{-st} \cdot 1\,dt = \left.-\frac{1}{s}e^{-st}\right|_0^\infty = \frac{1}{s}$$

und existiert für $\mathrm{Re}(s) > 0$.

$$\left.-\frac{1}{s}e^{-st}\right|_0^\infty = \lim_{T\to\infty} \left.-\frac{1}{s}e^{-st}\right|_0^T$$

Dies liefert die Korrespondenz

$$1 \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{s}$$

$$= \underbrace{\lim_{T\to\infty} -\frac{e^{-sT}}{s}}_{=0} - \left(\frac{1}{s}\right) = \frac{1}{s}$$

falls $\mathrm{Re}\, s > 0$

$$\boxed{1 \le 1 \cdot e^{+\sigma_0 t} \qquad \sigma_0 = 0}$$

$\mathrm{Re}\, s > \sigma_0 = 0$

Jan 18-14:39

Beispiele: (Fortsetzung)

2) Die Laplace–Transformierte von $F(t) = t^n$, $n = 1, 2, 3, \dots$ ist gegeben durch

$$f(s) = \int_0^\infty e^{-st}\, t^n dt$$

Das Integral existiert für $\mathrm{Re}(s) > 0$ und mittels partieller Integration findet man

$$\int_0^\infty e^{-st}\, t^n dt = \frac{n}{s}\int_0^\infty e^{-st}\, t^{n-1} dt$$

Wiederholte Anwendung ergibt die Korrespondenz

$$t^n \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet \frac{n!}{s^{n+1}} \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

$$\int_0^\infty \underbrace{e^{-st}}_{v'} \underbrace{t}_{u}\,dt = \underbrace{\left.\frac{e^{-st}}{-s}\, t\right|_0^\infty}_{=0} - \int_0^\infty \frac{e^{-st}}{-s}\,dt = \left.\frac{e^{-st}}{-s^2}\right|_0^\infty = \frac{1}{s^2}$$

Jan 18-14:44

Beispiele: (Fortsetzung)

3) Gegeben sei die komplexe Funktion $F(t) = e^{at}$ mit $a = \alpha + i\beta$:

$$\begin{aligned} f(s) &= \int_0^\infty e^{-st} e^{at} dt \\ &= \int_0^\infty e^{-(s-a)t} dt \\ &= -\frac{1}{s-a} e^{-(s-a)t} \Big|_0^\infty \\ &= \frac{1}{s-a} \quad \text{für } \mathrm{Re}(s) > \alpha \end{aligned}$$

$\lim_{T\to\infty} -\frac{1}{s-a} e^{-\mathrm{Re}(s-a)T}$

$e^{-i\,\mathrm{Im}(s-a)t}$

$\to 0$

Damit ergibt sich die Korrespondenz

$$e^{at} \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{s-a}$$

Jan 18-14:48

Beispiele: (Fortsetzung)

4) Wir betrachten die Funktion

$$F(t) = \sin(\omega_0 t) \qquad \omega_0 \in \mathbb{R}$$

Es gilt

$$\sin(\omega_0 t) = \frac{1}{2i}\left(e^{i\omega_0 t} - e^{-i\omega_0 t}\right)$$

Wegen

$$e^{at} \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{s-a}$$

erhalten wir die Korrespondenz

$$\sin(\omega_0 t) \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{\omega_0}{s^2+\omega_0^2} = \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{s-i\omega_0} - \frac{1}{s+i\omega_0}\right)$$

$$= \frac{1}{2i}\,\frac{\cancel{s} + i\omega_0 - \cancel{s} + i\omega_0}{s^2+\omega_0^2} = \frac{\omega_0}{s^2+\omega_0^2}$$

Jan 18-14:50

Grundregeln der Laplace–Transformation

1) **Additionssatz**
Für beliebige komplexe Konstanten a und b gilt:

$$aF(t) + bG(t) \circ\!\!-\!\!\bullet af(s) + bg(s)$$

2) **Ähnlichkeitssatz**
Für jede reelle Konstante $\alpha > 0$ gitl:

$$F(\alpha t) \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{\alpha} f\left(\frac{s}{\alpha}\right)$$

Beispiel: Aus

$$e^t \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{s-1}$$

folgt

$$e^{\alpha t} \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{\alpha}\,\frac{1}{\frac{s}{\alpha}-1} = \frac{1}{s-\alpha}$$

$$\frac{1}{\alpha}\int_0^\infty e^{-\frac{s}{\alpha}t\alpha} F(\alpha t)\, d(\alpha t) = [\tau = \alpha t] = \dots = \frac{1}{\alpha}\int_0^\infty e^{-\frac{s}{\alpha}\tau} F(\tau) d\tau = \frac{1}{\alpha} f\left(\frac{s}{\alpha}\right)$$

Jan 18-14:54

Grundregeln der Laplace–Transformation

1) **Additionssatz**
Für beliebige komplexe Konstanten a und b gilt:

$$aF(t) + bG(t) \circ\!\!-\!\!\bullet af(s) + bg(s)$$

2) **Ähnlichkeitssatz**
Für jede reelle Konstante $\alpha > 0$ gitl:

$$F(\alpha t) \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{\alpha} f\left(\frac{s}{\alpha}\right)$$

Beispiel: Aus

$1 \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{s}$

$$e^t \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{s-1}$$

folgt

$$e^{\alpha t} \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{\alpha}\,\frac{1}{\frac{s}{\alpha}-1} = \frac{1}{s-\alpha}$$

$$\frac{1}{\alpha}\int_0^\infty e^{-\frac{s}{\alpha}t\alpha} F(\alpha t)\, d(\alpha t) = [\tau = \alpha t] = \dots = \frac{1}{\alpha}\int_0^\infty e^{-\frac{s}{\alpha}\tau} F(\tau) d\tau = \frac{1}{\alpha} f\left(\frac{s}{\alpha}\right)$$

Jan 18-14:56

$$sf(s) - F(0) = \int_0^\infty \underbrace{-s e^{-st}}_{(e^{-st})'} F(t)\,dt - F(0)$$

$$= -e^{-st}F(t)\Big|_0^\infty + \int_0^\infty e^{-st} F'(t) - F(0)$$

$$= -(-\cancel{F(0)}) + \mathcal{L}[F'](s) - \cancel{F(0)}$$

$f(s) = \int_0^\infty e^{-st} F(t)\,dt\,, \quad f'(s) = -\int_0^\infty e^{-st}\, t\, F(t)\,dt$

$f''(s) = (-1)^2 \int_0^\infty e^{-st}\, t^2 F(t)\,dt$

$$\frac{f(s)}{s} = \int_0^\infty \underbrace{\frac{e^{-st}}{s}}_{v}\, \underbrace{F(t)}_{v'}\,dt = \underbrace{\frac{e^{-st}}{s}\int_0^t F(\tau)\,d\tau\,\Big|_0^\infty}_{=0} + \int_0^\infty e^{-st}\int_0^t F(\tau)\,d\tau\,dt$$

$$e^{-sT_0} \underbrace{\int_0^\infty e^{-s(t-T_0)} F(t-T_0)\, d(t-T_0)}_{f(s)} = e^{-sT_0} f(s)$$

$$f(s-a) = \int_0^\infty e^{-(s-a)t} F(t)\,dt = \underbrace{\int_0^\infty e^{-st}\, e^{at} F(t)\,dt}_{\mathcal{L}[e^{at}F(t)]}$$

Jan 18-14:58

Problem: Linear, <u>mit Konst. Koeff.</u>

$Y'(t) = t\,Y(t) \qquad Y(0) = 1$

$\downarrow$

$sy(s) - Y(0) = -y'(s)$

$Y''(t) + \alpha^2 Y(t) = \sin(\alpha t) = \mathrm{Im}\left(e^{i\alpha t}\right)$

$Y_h(t) = a\cos\alpha t + b\sin\alpha t$

$Y_p(t) = ~~\alpha t~~\; At\cos\alpha t + Bt\sin\alpha t$

Jan 18-15:25

DGL1.pdf - Adobe Reader
Datei Bearbeiten Anzeige Dokument Werkzeuge Fenster Hilfe
128 / 208 69,9% Suchen

Beispiel: (Fortsetzung) $\sin \alpha t \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{\alpha}{s^2+\alpha^2}$

Mit dem Multiplikationssatz

$$tF(t) \circ\!\!-\!\!\bullet -f'(s)$$

folgt:

$$-\frac{d}{ds}\frac{\alpha}{s^2+\alpha^2} \bullet\!\!-\!\!\circ t\sin(\alpha t)$$

und mit dem Integrationssatz:

$$\frac{1}{3}\cdot -\frac{d}{ds}\frac{\alpha}{s^2+\alpha^2} \bullet\!\!-\!\!\circ \int_0^t \tau\sin(\alpha\tau)d\tau = \frac{1}{\alpha^2}(-\alpha t\cos(\alpha t)+\sin(\alpha t))$$

Die Lösung lautet demnach

$$Y(t) = \frac{\cancel{2}}{2\alpha^2}(-\alpha t\cos(\alpha t)+\sin(\alpha t))$$

Start DGL1.pdf - Adobe Reader Start-Center dgl_18.01.10 - SMART N...

Jan 18-15:37

Beispiel: (Fortsetzung) $\sin \alpha t \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{\alpha}{s^2+\alpha^2}$

Mit dem Multiplikationssatz

$$tF(t) \circ\!\!-\!\!\bullet -f'(s)$$

folgt:

$$-\frac{d}{ds}\frac{\alpha}{s^2+\alpha^2} \bullet\!\!-\!\!\circ t\sin(\alpha t)$$

und mit dem Integrationssatz:

$$\frac{1}{3}\cdot -\frac{d}{ds}\frac{\alpha}{s^2+\alpha^2} \bullet\!\!-\!\!\circ \int_0^t \tau\sin(\alpha\tau)d\tau = \frac{1}{\alpha^2}(-\alpha t\cos(\alpha t)+\sin(\alpha t))$$

Die Lösung lautet demnach

$$Y(t) = \frac{\cancel{2}}{2\alpha^2}(-\alpha t\cos(\alpha t)+\sin(\alpha t))$$

Jan 18-15:37

Beispiel: Wir betrachten das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} Y'' + Y' + 4Z &= \sin(\omega t) \\ Y' + Z' + Z &= 0 \end{aligned}$$

mit den Anfangsbedingungen $Y(0) = -\frac{1}{3}$, $Y'(0) = 0$ und $Z(0) = 0$

Anwendung der Laplace–Transformation ergibt

$$\begin{aligned} s^2y(s) - sY(0) - Y'(0) + sy(s) - Y(0) + 4z(s) &= \frac{\omega}{s^2+\omega^2} \\ sy(s) - Y(0) + sz(s) - Z(0) + z(s) &= 0 \end{aligned}$$

Einsetzen der Anfangsbedingungen ergibt

$$\begin{aligned} s(s+1)y(s) + 4z(s) &= \frac{\omega}{s^2+\omega^2} - \frac{s+1}{3} \\ sy(s) + (s+1)z(s) &= -\frac{1}{3} \end{aligned}$$

Jan 18-15:41

Beispiel: (Fortsetzung)

Dies ein lineares Gleichungssystem mit der Matrix

$$A = A(s) = \begin{pmatrix} s(s+1) & 4 \\ s & s+1 \end{pmatrix} \qquad A^{-1} = \frac{1}{s(s+1)^2 - 4s}\begin{pmatrix} s+1 & - \\ -s & s(s+ \end{pmatrix}$$

Als Lösung $(y(s), z(s))^T$ erhalten wir

$$\begin{aligned} y(s) &= \frac{3\omega(s+1) - [(s+1)^2-4](s^2+\omega^2)}{3(s^2+\omega^2)s[(s+1)^2-4]} \\ z(s) &= \frac{\omega}{(s^2+\omega^2)[(s+1)^2-4]} \end{aligned}$$

Die nächsten Schritte:

1) **Partialbruchzerlegung**
2) Rücktransformation aus der **Korrespondenztabelle**

Jan 18-15:44