Vo Dgl I 11.1.01

Jan 11-14:14

4.4 Eigenwertaufgaben

Gegeben sei ein homogenes lineares Randwertproblem n–ter Ordnung

$$L[y] = y^{(n)}(t) + a_{n-1}(t,\lambda)y^{(n-1)}(t) + \ldots + a_0(t,\lambda)y(t) = 0$$

$$R_k[y] = \sum_{l=0}^{n-1} (\alpha_{k,l}y^{(l)}(a) + \beta_{k,l}y^{(l)}(b)) = 0, \qquad k = 1,2,\ldots,n$$

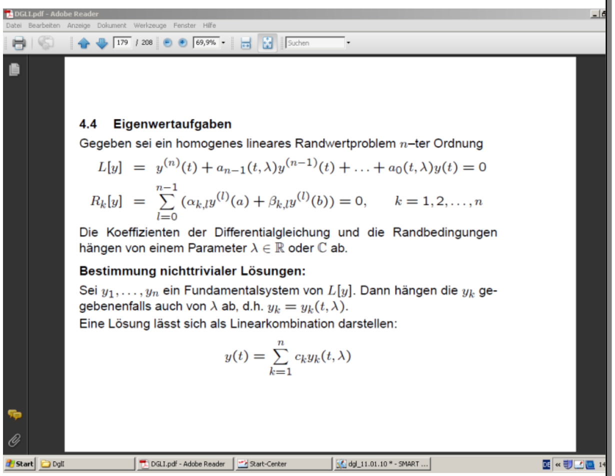
Die Koeffizienten der Differentialgleichung und die Randbedingungen hängen von einem Parameter $\lambda \in \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ ab.

Bestimmung nichttrivialer Lösungen:

Sei $y_1,\ldots,y_n$ ein Fundamentalsystem von $L[y]$. Dann hängen die y_k gegebenenfalls auch von λ ab, d.h. $y_k = y_k(t,\lambda)$.
Eine Lösung lässt sich als Linearkombination darstellen:

$$y(t) = \sum_{k=1}^{n} c_k y_k(t,\lambda)$$

Jan 11-14:32


4.4 Eigenwertaufgaben
Gegeben sei ein homogenes lineares Randwertproblem n–ter Ordnung
$$L[y] = y^{(n)}(t) + a_{n-1}(t,\lambda)y^{(n-1)}(t) + \ldots + a_0(t,\lambda)y(t) = 0$$
$$R_k[y] = \sum_{l=0}^{n-1} (\alpha_{k,l}y^{(l)}(a) + \beta_{k,l}y^{(l)}(b)) = 0, \qquad k = 1,2,\ldots,n$$
Die Koeffizienten der Differentialgleichung und die Randbedingungen hängen von einem Parameter $\lambda \in \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ ab.
Bestimmung nichttrivialer Lösungen:
Sei $y_1,\ldots,y_n$ ein Fundamentalsystem von $L[y]$. Dann hängen die y_k gegebenenfalls auch von λ ab, d.h. $y_k = y_k(t,\lambda)$.
Eine Lösung lässt sich als Linearkombination darstellen:
$$y(t) = \sum_{k=1}^{n} c_k y_k(t,\lambda)$$

Jan 11-14:32

Die Linearkombination

$$y(t) = \sum_{k=1}^{n} c_k y_k(t,\lambda)$$

ist eine Lösung, falls die Randbedigungen lineare RB

$$R_j[y] = \sum_{k=1}^{n} c_k R_j[y_k] = 0, \qquad j = 1,\ldots,n$$

erfüllt sind. Dies ist ein homogenes LGS für $c_1,\ldots,c_n$ mit Koeffizientenmatrix

$$\mathrm{E}(\lambda) := \begin{pmatrix} R_1[y_1] & \ldots & R_1[y_n] \\ \vdots & & \vdots \\ R_n[y_1] & \ldots & R_n[y_n] \end{pmatrix} \qquad E(\lambda)\begin{pmatrix} c_1 \\ c_n \end{pmatrix} = 0$$

Das Randwertproblem hat also genau dann nichttriviale Lösungen $y(t) \neq 0$, falls gilt

$$D(\lambda) := \det \mathrm{E}(\lambda) = 0$$

Jan 11-14:36

Beispiel:

Wir betrachten die Randwertaufgabe

$$y'' + \lambda^2 y = 0, \qquad y(0) = y(1) = 0$$

Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung lautet:

$$y(t) = c_1\cos(\lambda t) + c_2\sin(\lambda t)$$

Die Randbedingungen ergeben dann

$$y(0) = 0 \;\Rightarrow\; c_1 = 0$$
$$y(1) = 0 \;\Rightarrow\; c_2\sin(\lambda) = 0$$

Für die Eigenwerte ergibt sich demnach

$$\lambda_k = k\pi, \qquad k \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$$

mit zugehörigen Eigenfunktionen

$$y_k(t) = \sin(\lambda_k t)$$

$y'' = 0$ $\quad y(t) = a + bt$ $\quad y(1) = 0 \Rightarrow b = 0$

$y(0) = 0 \Rightarrow a = 0$

Jan 11-14:43

Beispiel:

Wir betrachten die Randwertaufgabe

$$y'' + \lambda^2 y = 0, \qquad y(0) = 0,\ y(1) - y'(1) = 0$$

Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung lautet:

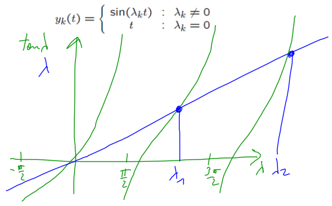
$$y(t) = c_1\cos(\lambda t) + c_2\sin(\lambda t)$$

Die Randbedingungen ergeben dann

$$y(0) = 0 \;\Rightarrow\; c_1 = 0$$
$$y(1) - y'(1) = 0 \;\Rightarrow\; c_2(\sin(\lambda) - \lambda\cos(\lambda)) = 0$$

Die Eigenwerte sind also die Lösungen der nichtlinearen Gleichung $\lambda = \tan\lambda$ mit zugehörigen Eigenfunktionen $\boxed{\lambda = \tan\lambda}$

$$y_k(t) = \begin{cases} \sin(\lambda_k t) & : \lambda_k \neq 0 \\ t & : \lambda_k = 0 \end{cases}$$

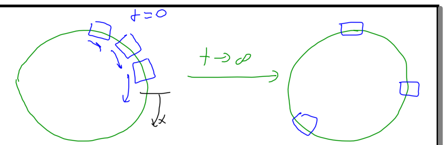


$\lambda = 0$ $\quad y(t) = a + bt$ $\quad y(0) = 0 \Rightarrow a = b$

$y(1) - y'(1) = 0 \Rightarrow b \in \mathbb{R}$

$y(t) = bt$

Jan 11-14:45



$x_j = x_j(t) \qquad j = 1, \dots, N \qquad \dot{x}_j(t) \to c, \; j=1,\dots,N$

$\Rightarrow x_{j+1}(t) - x_j(t) \to y_j$

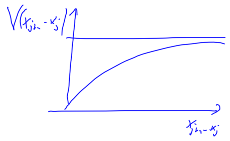
Länge L

$\lambda = \frac{N}{L}$ "mittlere Dichte"

λ klein ✓

λ groß ??

$\ddot{x}_j(t) = -\left[\dot{x}_j(t) - V\left(x_{j+1}(t) - x_j(t)\right)\right] \quad j = 1,\dots,N$



Jan 11-14:48

Rückführung auf homogene Randbedingungen:

Sei $y_0(t)$ eine C^2–Funktion mit

$$R_1[y_0] = d_1 \qquad R_2[y_0] = d_2$$

d.h. $y_0(t)$ erfüllt die gegebenenen Randbedingungen.

Wir setzen

$$z(t) := y(t) - y_0(t)$$

Dann gilt:

Löst $y(t)$ das Problem

$$L[y] = h(t), \qquad R_1[y] = d_1, \qquad R_2[y] = d_2,$$

so löst $z(t)$ das homogene Randwertproblem

$$L[z] = \tilde{h}(t) := h(t) - L[y_0](t), \qquad R_1[z] = 0, \qquad R_2[z] = 0$$

$L[z] = L[y-y_0] = L[y] - L[y_0] = h - L[y_0] = \tilde{h}(t)$ linear!

$R_1[z] = R_1[y-y_0] = R_1[y] - R_1[y_0] = d_1 - R_1[y_0] = 0$

Jan 11-15:25

Erinnerung:

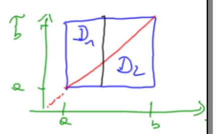
$y''(t) + a_1 y'(t) + a_0 y(t) = h(t)$

lin., konst. Koeff.

$y_p(t) = \int_{t_0}^{t} \underbrace{G(t,\tau)}_{\text{Greensfk.}} h(\tau)\, d\tau$

Jan 11-15:25

Konstruktion der Greenschen Funktion:



Wir nehmen an, dass $G(t,\tau)$ auf den beiden Mengen

$$D_1 := \{(t,\tau) \;:\; a \le \tau \le t \le b\} \qquad D_2 := \{(t,\tau) \;:\; a \le t \le \tau \le b\}$$

glatt ist, d.h. sich als eine C^2–Funktion auf den Rand fortsetzen lässt. dass jedoch $G(t,\tau)$ für $t = \tau$ Sprünge haben können.

$$y(t) = \int_a^b G(t,\tau)h(\tau)\,d\tau$$

$$y'(t) = \frac{d}{dt}\left\{\int_a^t G(t,\tau)h(\tau)\,d\tau + \int_t^b G(t,\tau)h(\tau)\,d\tau\right\}$$

$$= \int_a^b G_t(t,\tau)h(\tau)\,d\tau + \left[G(t,t^-) - G(t,t^+)\right]\, h(t)$$

Jan 11-15:34

Wir verlangen:

$$G(t,t^-) - G(t,t^+) = 0 \quad !$$

d.h. die Funktion $G(t,\tau)$ ist stetig für $t = \tau$.

Für die zweite Ableitung gilt dann:

$$y''(t) = \int_a^b G_{tt}(t,\tau)h(\tau)\,d\tau + \left[G_t(t,t^-) \quad G_t(t,t^+)\right]\, h(t)$$

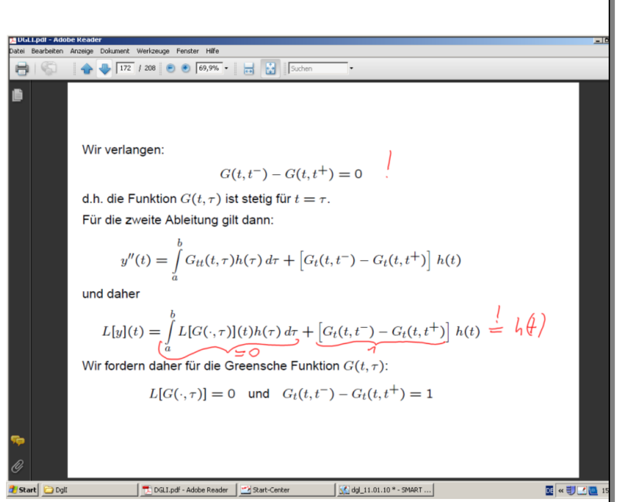
und daher

$$L[y](t) = \underbrace{\int_a^b L[G(\cdot,\tau)](t)h(\tau)\,d\tau}_{=0} + \underbrace{\left[G_t(t,t^-) - G_t(t,t^+)\right]}_{1}\, h(t) \overset{!}{=} h(t)$$

Wir fordern daher für die Greensche Funktion $G(t,\tau)$:

$$L[G(\cdot,\tau)] = 0 \quad \text{und} \quad G_t(t,t^-) - G_t(t,t^+) = 1$$

Jan 11-15:36


Wir verlangen:

$$G(t,t^-) - G(t,t^+) = 0 \quad !$$

d.h. die Funktion $G(t,\tau)$ ist stetig für $t = \tau$.

Für die zweite Ableitung gilt dann:

$$y''(t) = \int_a^b G_{tt}(t,\tau)h(\tau)\,d\tau + \left[G_t(t,t^-) - G_t(t,t^+)\right]\, h(t)$$

und daher

$$L[y](t) = \underbrace{\int_a^b L[G(\cdot,\tau)](t)h(\tau)\,d\tau}_{=0} + \underbrace{\left[G_t(t,t^-) - G_t(t,t^+)\right]}_{1}\, h(t) \overset{!}{=} h(t)$$

Wir fordern daher für die Greensche Funktion $G(t,\tau)$:

$$L[G(\cdot,\tau)] = 0 \quad \text{und} \quad G_t(t,t^-) - G_t(t,t^+) = 1$$

Jan 11-15:36

Verfahren zur Konstruktion einer Greenschen Funktion:

1) Ist $y_1(t), y_2(t)$ ein Fundamentalsystem der homogenen Gleichung, so machen wir den **Ansatz**:

$$G(t,\tau) = \begin{cases} (a_1(\tau) + b_1(\tau))y_1(t) + (a_2(\tau) + b_2(\tau))y_2(t) & : \ \tau \le t \\ (a_1(\tau) - b_1(\tau))y_1(t) + (a_2(\tau) - b_2(\tau))y_2(t) & : \ \tau \ge t \end{cases}$$

2) Die Stetigkeit und Sprungbedingung an $G(t,\tau)$ liefert dann: bei $t = \tau$

$$\begin{aligned} b_1(t)y_1(t) + b_2(t)y_2(t) &= 0 & \quad G(t,t_-) = G(t,t_+) \\ b_1(t)y_1'(t) + b_2(t)y_2'(t) &= \frac{1}{2} & \quad G_t(t,t_-) + G_t(t,t_+) = 1 \end{aligned}$$

Dies ist ein LGS für $b_1(t)$ und $b_2(t)$ mit regulärer Koeffizientenmatrix.

3) Die Randbedingungen ergeben schliesslich ein LGS für die beiden Größen $a_1(t)$ und $a_2(t)$, das ebenfalls eindeutig lpsbar ist.

Jan 11-15:40

Beispiel: Gegeben sei das Randwertproblem

$$\begin{aligned} y''(t) + y(t) &= h(t) \\ y(0) - y(\pi) &= 0 \\ y'(0) - y'(\pi) &= 0 \end{aligned}$$

Ein **Fundamentalsystem** ist $y_1(t) = \cos t$ und $y_2(t) = \sin t$.

Unser **Ansatz** für die Greensche Funktion lautet daher

$$G(t,\tau) = \begin{cases} (a_1(\tau) + b_1(\tau))\cos t + (a_2(\tau) + b_2(\tau))\sin t & : \ \tau \le t \\ (a_1(\tau) - b_1(\tau))\cos t + (a_2(\tau) - b_2(\tau))\sin t & : \ \tau \ge t \end{cases}$$

LGS für die Koeffizienten $b_1(t)$ und $b_2(t)$:

$$\begin{aligned} b_1(t)\cos t + b_2(t)\sin t &= 0 & \quad / \cos t \\ -b_1(t)\sin t + b_2(t)\cos t &= \frac{1}{2} & \quad / -\sin t \end{aligned}$$

Jan 11-15:41

Einsetzen von $G(t,\tau)$ in **Randbedingungen**:

Die homogenen Randbedingungen lauten

$$y(0) - y(\pi) = 0, \qquad y'(0) - y'(\pi) = 0$$

Wir berechnen:

$$\begin{aligned} G(0,\tau) &= (a_1(\tau) + b_1(\tau))\cos t|_{t=0} + (a_2(\tau) + b_2(\tau))\sin t|_{t=0} & \quad t \le \tau \\ &= a_1(\tau) + b_1(\tau) \\ G(\pi,\tau) &= (a_1(\tau) + b_1(\tau))\cos t|_{t=\pi} + (a_2(\tau) + b_2(\tau))\sin t|_{t=\pi} & \quad t \ge \tau \\ &= -(a_1(\tau) + b_1(\tau)) \\ G_t(0,\tau) &= -(a_1(\tau) + b_1(\tau))\sin t|_{t=0} + (a_2(\tau) + b_2(\tau))\cos t|_{t=0} & \quad t \le \tau \\ &= a_2(\tau) + b_2(\tau) \\ G_t(\pi,\tau) &= -(a_1(\tau) + b_1(\tau))\sin t|_{t=\pi} + (a_2(\tau) + b_2(\tau))\cos t|_{t=\pi} & \quad t \ge 0 \\ &= -(a_2(\tau) + b_2(\tau)) \end{aligned}$$

Jan 11-15:42