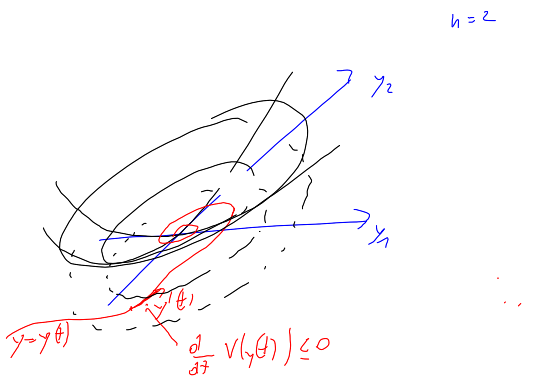
Dgl 4. 1. 2010



Jan 4-14:15

$$\alpha_1 y(a) + \alpha_2 y'(a) = \alpha_1 y(a) + \alpha_2 z(a) = d_1$$
$$\beta_1 y(a) + \beta_2 z(b) = d_2$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{B_a} \begin{pmatrix} y(a) \\ z(a) \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{pmatrix}}_{B_b} \begin{pmatrix} y(b) \\ z(b) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix}$$

Jan 4-14:41

Randwerte bestimmen die Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung:

Beispiel: Wir betrachten die (lineare) DGL zweiter Ordnung

$$y'' + y = 0 \qquad y = a \cos t + b \sin t$$

1) Die Randwerte

$$y(0) = 0 \qquad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$$

ergeben die eindeutig bestimmte Lösung $y(t) = \sin t$.

2) **Keine** Lösung existiert für die Randwerte

$$y(0) = 0 \qquad y(\pi) = 1$$

3) Für die Randwerte

$$y(0) = 0 \qquad y(\pi) = 0$$

gibt es **unendlich viele** Lösungen $y(t) = c \sin t$, $c \in \mathbb{R}$ beliebig.

Jan 4-14:46

Beispiel: Wir betrachten die Differentialgleichung $y'' + y = 0$ aus dem letzten Beispiel.
Wir schreiben die Gleichung zweiter Ordnung zunächst als ein System und bestimmen anschließend das zugehörige Fundamentalsystem:

$$\mathrm{Y}(t) = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}$$

Damit folgt:

$$\begin{aligned} \mathrm{E} &= \mathrm{B}_a \mathrm{Y}(0) + \mathrm{B}_b \mathrm{Y}(b) \\ &= \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{B_a} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{Y(0)} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{B_b} \underbrace{\begin{pmatrix} \cos b & \sin b \\ -\sin b & \cos b \end{pmatrix}}_{Y(b)} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \cos b & \sin b \end{pmatrix} \end{aligned}$$

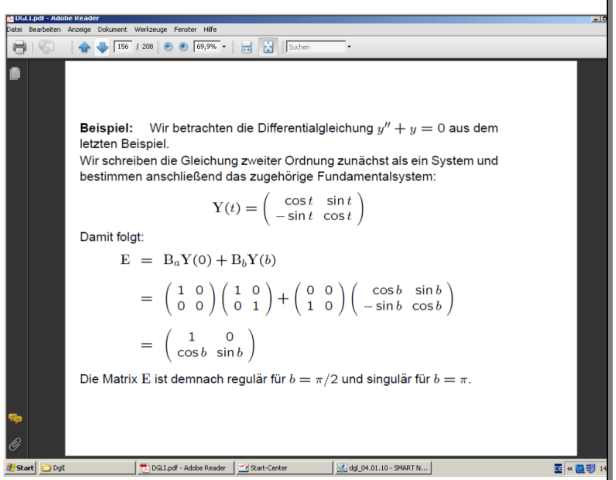
Die Matrix E ist demnach regulär für $b = \pi/2$ und singulär für $b = \pi$.

Jan 4-14:53

$$y(0) = 0 \qquad y(b) = y_b \qquad z = y'$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y(0) \\ z(0) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y(b) \\ z(b) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix}$$

Jan 4-14:53


Beispiel: Wir betrachten die Differentialgleichung $y'' + y = 0$ aus dem letzten Beispiel.
Wir schreiben die Gleichung zweiter Ordnung zunächst als ein System und bestimmen anschließend das zugehörige Fundamentalsystem:

$$\mathrm{Y}(t) = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}$$

Damit folgt:

$$\begin{aligned} \mathrm{E} &= \mathrm{B}_a \mathrm{Y}(0) + \mathrm{B}_b \mathrm{Y}(b) \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos b & \sin b \\ -\sin b & \cos b \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \cos b & \sin b \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Die Matrix E ist demnach regulär für $b = \pi/2$ und singulär für $b = \pi$.

Jan 4-14:56

Viele andere Probleme lassen sich auf Randwertaufgaben zurückführen.

Beispiel: Gegeben sei ein **Randwertproblem mit freier Endzeit**:

$$\begin{aligned} y'(t) &= f(t, y(t)) \qquad 0 \le t \le T \\ r(y(0), y(T)) &= 0 \end{aligned}$$

wobei T zu bestimmen ist und $r : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{n+1}$ gerade $(n+1)$ Randbedingungen definiert.

Wir setzen nun $t = \tau \cdot T$ und

$$z(\tau) := y(\tau \cdot T), \qquad z_{n+1}(\tau) := T \qquad 0 \le \tau \le 1$$

$$\frac{d}{dt} = \frac{1}{T}\frac{d}{d\tau}$$

Dann gilt auf dem festen Intervall $0 \le \tau \le 1$:

$$\begin{aligned} z'(\tau) &= z_{n+1} f(z_{n+1} \cdot \tau, z(\tau)), \qquad z'_{n+1}(\tau) = 0 \\ r(z(0), z(1)) &= 0 \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{z_{n+1}}\frac{d}{d\tau}$$

Dies ist offensichtlich eine allgemeine Zweipunkt–Randwertaufgabe im $\mathbb{R}^{n+1}$ über dem festen Integrationsintervall $[0, 1]$.

Jan 4-15:00

4.2 Grundbegriffe der Variationsrechnung

Problem der Brachistochrone (Bernoulli, 1696)

Man bestimme eine differenzierbare Funktion $y = y(\cancel{x})$ mit Randbedingungen $y(a) = y_a$, $y(b) = y_b$, so dass das Integral

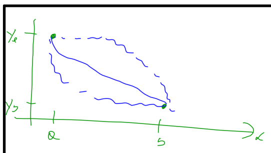
$$I[y] := \int_a^b \sqrt{\frac{1 + (y'(\cancel{x}))^2}{y_a - y(x)}}\, dx$$

minimal wird.

Interpretation:

Das angegebene Funktional $I[y]$ beschreibt, bis auf einen Vorfaktor, die Zeit, die ein Massenpunkt benötigt, um unter dem Einfluss der Schwerkraft entlang der Kurve $y = y(x)$ von Punkt $A = (a, y_a)$ zum Punkt $B = (b, y_b)$ zu kommen.

Jan 4-15:03



$y = y_a \qquad v = 0$

$mgy + m\frac{v^2}{2} = \text{const} = mgy_a$

$v^2 = 2g(y_a - y) \qquad v = \sqrt{2g(y_a - y)}$

$x = x(t)$

$y = y(x(t))$

$v = |\dot{\vec{f}}|(t) = \sqrt{\dot{x}^2 + (y'\dot{x})^2} = \sqrt{1 + y'(x)^2}\,\dot{x}$

$\dot{x} = \frac{dx}{dt}$

$1 = \sqrt{\frac{1 + y'(x)^2}{2g\,(y_a - y(x))}}\,\frac{dx}{dt}$

$dt = \sqrt{\quad / \quad}\, dx$

$T = \int_0^{t_b} dt = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_a^b \sqrt{\frac{1 + y'(x)^2}{y_a - y(x)}}\, dx = I[y]$

Jan 4-15:05

Wir berechnen nun die **1. Variation**: $0 \stackrel{!}{=} \frac{d}{d\varepsilon} J(\varepsilon) \Big|_{\varepsilon = 0} =$

$$\begin{aligned} = \delta I &= \frac{d}{d\varepsilon} \int_a^b f(t, \underbrace{y_0 + \varepsilon h}_{y}, \underbrace{y_0' + \varepsilon h'}_{y'})dt \Bigg|_{\varepsilon=0} \\ &= \int_a^b \Bigg(f_y(t, y_0, y_0') \cdot h(t) + \underbrace{f_{y'}(t, y_0, y_0') \cdot h'(t)}_{\text{Partielle Integration}} \Bigg)\, dt \\ &= \int_a^b \left(f_y(t, y_0, y_0') - \frac{d}{dt} f_{y'}(t, y_0, y_0') \right) \cdot h(t)dt + \underbrace{f_{y'}(t, y_0, y_0') \cdot h(t)\Big|_a^b}_{=0} \\ &= \int_a^b \left(f_y(t, y_0, y_0') - \frac{d}{dt} f_{y'}(t, y_0, y_0') \right) \cdot h(t)dt \end{aligned}$$

Jan 4-15:27

Zwei Spezialfälle:

1) Hängt f nicht von y ab, $f = f(t, y')$ so lautet die Euler–Lagrange Gleichung

$$\frac{d}{dt} f_{y'}(t, y_0, y_0') = 0$$

Dies bedeutet aber für alle $a \le t \le b$:

$$f_{y'}(t, y_0, y_0') = \text{const.}$$

2) Hängt f nicht explizit von t ab, so gilt für alle $a \le t \le b$:

$$H := f - f_{y'} y' = \text{const.}$$

denn

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} H(t) &= \frac{d}{dt}(f - f_{y'}y') = f_y y' + \cancel{f_{y'}y''} - \left(\frac{d}{dt} f_{y'}\right) y' - \cancel{f_{y'}y''} \\ &= \left(f_y - \frac{d}{dt} f_{y'}\right) y' = 0 \end{aligned}$$

Jan 4-15:36

Beispiel: (Problem der Brachistochrone)

Gesucht ist eine C^1–Funktion $y(t)$, die das Funktional

$$I[y] := \int_a^b \sqrt{\frac{1 + (y'(t))^2}{y_a - y(x)}}\, dx$$

$f(y(t), y'(t))$

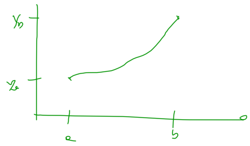
unter den Nebenbedingungen

$$y(a) = y_a \qquad y(b) = y_b$$

minimiert. Der Integrand von $I[y]$ hängt nicht explizit von t ab, wir bestimmen daher die **Hamilton–Funktion**:

$$\begin{aligned} H &= f - f_{y'} y' \\ &= \underbrace{\sqrt{\frac{1 + (y'(t))^2}{y_a - y(t)}}}_{f} - \underbrace{\sqrt{\frac{y_a - y(t)}{1 + (y'(t))^2}} \cdot \frac{y'(t)}{y_a - y(t)}}_{f_{y'}} \cdot y'(t) \end{aligned}$$

Jan 4-15:38



Bogenlänge $S = \int_a^b \underbrace{\sqrt{1+y'^2(x)}}_{f}\,dx \longrightarrow \min$

$y(a) = y_a$

$y(b) = y_b$

$f = f(y')$

z.B. $f_{y'} = \text{const}$

$\frac{2y'}{2\sqrt{1+y'^2}} = \text{const}$

$\vdots$

$y'^2 = \text{const}$

$y' = \text{const} \Rightarrow$ Gerade

Jan 4-15:42