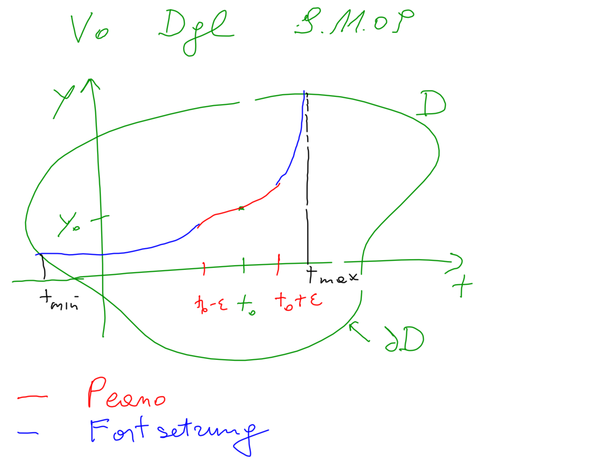


Nov 9-14:14

Bemerkung: Jede Lösung eines Anfangswertproblems lässt sich auf ein maximales Existenzintervall $-\infty \le t_{\min} < t < t_{\max} \le \infty$ fortsetzen. Der Graph $(t, y(t))$ der Lösung kommt dabei für $t \to t_{\min}$ bzw. $t \to t_{\max}$ dem Rand von D beliebig nahe, d.h. jeder Häufungspunkt von $(t, y(t))$ für $t \to t_{\min}$ bzw. $t \to t_{\max}$ liegt auf dem Rand ∂D.

Beispiel:

1) Die Lösung $y(t) = \exp(t)$ des Anfangswertproblems

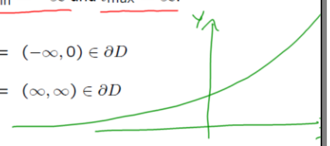
$$y' = y, \qquad y(0) = 1$$

ist auf ganz $\mathbb{R}$ definiert. Also ist $t_{\min} = -\infty$ und $t_{\max} = \infty$. Es ist $D = \mathbb{R}^2$ und

$$\lim_{t \to t_{\min}} (t, y(t)) = (-\infty, 0) \in \partial D$$
$$\lim_{t \to t_{\max}} (t, y(t)) = (\infty, \infty) \in \partial D$$

$f(t,y) = y$

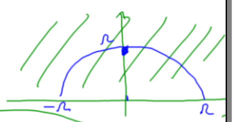
$D = \mathbb{R}^2$



Nov 9-14:32

2) Das Anfangswertproblem $f(t,y) = -\frac{t}{y}$

$$y' = -\frac{t}{y}, \quad y(0) = r > 0, \quad D = \mathbb{R} \times (0, \infty)$$



besitzt die Lösung $y(t) = \sqrt{r^2 - t^2}$. Dabei ist $t_{\min} = -r$, $t_{\max} = r$ und

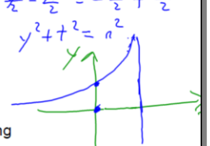
$yy' = -t$ $\int y\,dy = \int -t\,dt$ $\frac{y^2}{2} - \frac{y_0^2}{2} = -\frac{t^2}{2} + \frac{t_0^2}{2}$

$$\lim_{t \to t_{\min}} (t, y(t)) = (-r, 0) \in \partial D$$

$y^2 + t^2 = r^2$

3) Für das Anfangswertproblem $f(t,y) = y^2$

$$y' = y^2, \quad y(0) = 1, \quad D = \mathbb{R}^2$$



erhält man mittels Trennung der Variablen die Lösung

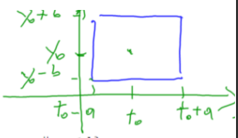
$$\boxed{y(t) = \frac{1}{1-t}}, \qquad -\infty = t_{\min} < t < t_{\max} = 1$$

$\frac{dy}{y^2} = dt$, $-\frac{1}{y}\Big|_{t_0}^{t} = t - t_0$, ...

Nov 9-14:39

Satz: **(Picard, Lindelöf)**

Die rechte Seite $f(t, y)$ sei stetig auf dem Quader



$$Q := \{(t, y) \in \mathbb{R}^{n+1} \; : \; |t - t_0| \le a \wedge \|y - y_0\|_\infty \le b\}$$

Ferner gelte mit Konstanten $M, L > 0$:

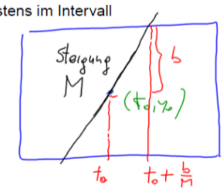
$$\|f(t, y)\| \le M \qquad \forall (t, y) \in Q \qquad \text{beschränkt}$$
$$\|f(t, \tilde{y}) - f(t, y)\| \le L\|\tilde{y} - y\| \quad \forall (t, \tilde{y}), (t, y) \in Q \qquad \text{Lipschitz stetig (in y)}$$

(Lipschitz–Bedingung)

Dann besitzt das Anfangswertproblem $y'(t) = f(t, y(t))$, $y(t_0) = y_0$ eine eindeutig bestimmte Lösung $y(t)$, die mindestens im Intervall $[t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]$ mit

$$\varepsilon := \min\left(a, \frac{b}{M}\right)$$

definiert ist.



Nov 9-14:45

$y' = f(t,y)$, $\int_{t_0}^{t}$,

Beweis: Durch Integration der Differentialgleichung folgt

$$y(t) = y(t_0) + \int_{t_0}^{t} f(\tau, y(\tau))\,d\tau$$

Lösung dieser Fixpunktgleichung mit Hilfe einer **Fixpunktiteration**:

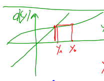
$$y^{(0)}(t) = y_0(t)$$
$$y^{(k+1)}(t) = y^{(k)}(t_0) + \int_{t_0}^{t} f(\tau, y^{(k)}(\tau))\,d\tau$$

Die Iteration liefert in jedem Schritt eine genauere Näherungslösung:

Verfahren der sukzessiven Approximation

Beweis läuft damit analog zum Beweis des Fixpunktsatzes (Analysis II)

y, $\phi(y)(t) = y(t_0) + \int_{t_0}^{t} f(\tau, y(\tau))\,d\tau$, Suche y $y = \phi(y)$



$y = \phi(y)$ $y_0, y_1, y_2, \ldots$

Wunsch $y_n \to y$

$y_{n+1} = \phi(y_n)$ $y = \phi(y)$

Kontraktivität ("$|\phi'(y)| < 1$")

h, g: $\boxed{\|\phi(h) - \phi(g)\|_\infty} = \|h(t_0) - g(t_0) + \int_{t_0}^{t} f(\tau, h(\tau)) - f(\tau, g(\tau))\,d\tau\|_\infty$

$\le \underbrace{\|h(t_0) - g(t_0)\|}_{=0} + \int_{t_0}^{t} \|f(\tau, h(\tau)) - f(\tau, g(\tau))\|_\infty\,d\sigma$

$\le \int_{t_0}^{t} L \|h - g\|_\infty\,d\sigma$

$\le \boxed{L(t - t_0) \|h - g\|}$

falls $|L(t - t_0)| < 1$ Kontraktiv

Nov 9-14:49

$$y^{(n)}(t) = y^{(n-1)}(t_0) + \int_{t_0}^{t} f(\tau, y^{(n-1)}(\tau))\,d\tau$$

Beispiel: (Verfahren der sukzessiven Approximation)

Wir betrachten das Anfangswertproblem $f(t,y) = y$

$$y'(t) = y(t), \quad y(0) = 1$$

Dann gilt mit $y^{(0)}(t) = 1$:

$$y^{(1)}(t) = y^{(0)}(t) + \int_0^t y^{(0)}(t)\,d\tau = 1 + t$$

$\Rightarrow$ (Beweis durch Induktion)

$$\boxed{y^{(k)}(t) = \sum_{j=0}^{k} \frac{1}{j!} t^j}$$

Für $k \to \infty$ folgt demnach

$$y(t) = \lim_{k \to \infty} y^{(k)}(t) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} t^j = \exp(t)$$

$$y^{(2)}(t) = y^{(1)}(0) + \int_0^t y^{(1)}(\tau)\,d\tau = 1 + \int_0^t (1+\tau)\,d\tau = 1 + t + \frac{t^2}{2}$$

Nov 9-15:00

Bemerkung:

1) Erfüllt die rechte Seite $\mathrm{f}(t,\mathrm{y})$ auf $[t_1,t_2]\times\mathbb{R}^n$ die Lipschitz–Bedingung

$$\|\mathrm{f}(t,\tilde{\mathrm{y}})-\mathrm{f}(t,\mathrm{y})\|\le L\|\tilde{\mathrm{y}}-\mathrm{y}\|,$$

so besitzt das Anfangswertproblem mit $t_0\in[t_1,t_2]$ eine eindeutig bestimmte Lösung, die auf ganz $[t_1,t_2]$ erklärt ist. Man nennt dies **Globale Existenz**.

2) Ein lineares Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} \mathrm{y}'(t) &= \mathrm{A}(t)\mathrm{y}(t)+\mathrm{h}(t) = f(t,y(t)) \\ \mathrm{y}(t_0) &= \mathrm{y}_0 \end{aligned} \qquad D=\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$$

mit stetigen Funktionen $\mathrm{A}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^{(n,n)}$, $\mathrm{h}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^n$ besitzt eine eindeutig bestimmte Lösung, die auf ganz $\mathbb{R}$ definiert ist.

3) Ist $\mathrm{f}(t,\mathrm{y})$ auf dem Quader Q eine C^1–Funktion, so erfüllt $\mathrm{f}(t,\mathrm{y})$ dort die Lipschitz–Bedingung.

zu 2) $\|f(t,y)-f(t,h)\| = \|A(t)(y(t)-h(t)) + \cancel{h(t)}-\cancel{h(t)}\| \le \underbrace{\|A(t)\|}_{L}\,\|y-h\|$

Lipschitz

Nov 9-15:06

Satz: **(Lemma von Gronwall)**

Gilt für eine auf $|t-t_0|\le\varepsilon$ stetige Funktion $r(t)$ eine Abschätzung der Form:

$$r(t)\le\alpha+\beta\int_{t_0}^{t} r(\tau)d\tau,\quad \alpha\ge 0,\ \beta>0$$

Annahme: $r(t)=\alpha+\beta\int_{t_0}^{t} r(\tau)d\tau$

so folgt für alle $|t-t_0|\le\varepsilon$ die Beziehung:

$$r(t)\le\alpha\, e^{\beta|t-t_0|}$$

Abl. $\boxed{\begin{aligned} r'(t) &= \beta\, r(t) \\ r(t_0) &= \alpha \end{aligned}}$

$r(t)=\alpha\, e^{\beta(t-t_0)}$

Beweis: Wir definieren für $t\ge t_0$

$$u(t):=e^{-\beta t}\int_{t_0}^{t} r(\tau)d\tau$$

Damit ergibt sich für die Ableitung von $u(t)$ die Beziehung:

$$u'(t)=-\beta u(t)+e^{-\beta t}r(t)$$

Nov 9-15:12

Satz: Für Anfangswerte $\mathrm{y}_0,\mathrm{z}_0\in\mathbb{R}^n$ seien die Lösungen $\mathrm{y}(t;t_0,\mathrm{y}_0)$ und $\mathrm{y}(t;t_0,\mathrm{z}_0)$ auf dem Intervall $|t-t_0|\le\varepsilon$ definiert.
Die Konstante $L>0$ sei eine Lipschitz–Konstante der rechten Seite $\mathrm{f}(t,\mathrm{y})$ auf einem Quader $Q=[t_0-\varepsilon,t_0+\varepsilon]\times\tilde{Q}$.
Dann gilt für $|t-t_0|\le\varepsilon$ die Abschätzung

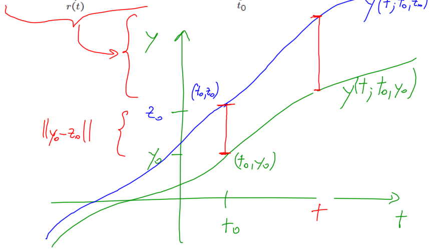
$$\boxed{\|\mathrm{y}(t;t_0,\mathrm{y}_0)-\mathrm{y}(t;t_0,\mathrm{z}_0)\|\le e^{L|t-t_0|}\cdot\|\mathrm{y}_0-\mathrm{z}_0\|}$$

Beweis: Die Aussage folgt direkt aus dem Lemma von Gronwall.

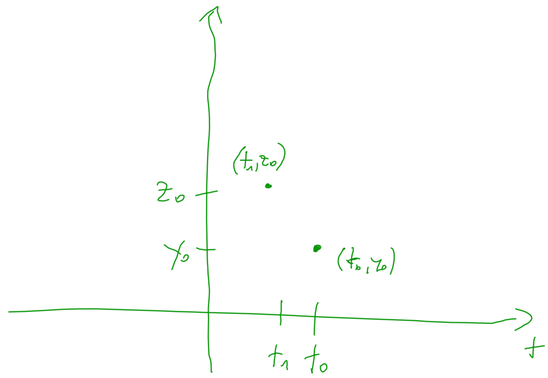
$$\mathrm{y}(t;t_0,\mathrm{y}_0)=\mathrm{y}_0+\int_{t_0}^{t}\mathrm{f}(\tau,\mathrm{y}(\tau;t_0,\mathrm{y}_0))d\tau$$

Mittels Dreicksungleichung erhalten wir damit:

$$\underbrace{\|\mathrm{y}(t;t_0,\mathrm{y}_0)-\mathrm{y}(t;t_0,\mathrm{z}_0)\|}_{r(t)}\le\|\mathrm{y}_0-\mathrm{z}_0\|+L\cdot\int_{t_0}^{t}\|\mathrm{y}(\tau;t_0,\mathrm{y}_0)-\mathrm{y}(\tau;t_0,\mathrm{z}_0)\|d\tau$$



Nov 9-15:14



Nov 9-15:21

Verallgemeinerung:

Sind $\mathrm{f}(t,\mathrm{y})$, $\mathrm{g}(t,\mathrm{y})$ stetig differenzierbar auf einem Quader mit

$$\begin{aligned} \|\mathrm{f}(t,\mathrm{y})-\mathrm{g}(t,\mathrm{y})\| &\le \delta && \text{Störung in der rechten Seite} \\ \|\mathrm{g}(t,\mathrm{y})\| &\le M \\ \|\mathrm{f}(t,\mathrm{y})-\mathrm{f}(t,\tilde{\mathrm{y}})\| &\le L\|\mathrm{y}-\tilde{\mathrm{y}}\| && \text{Lipschitz} \end{aligned}$$

so gilt für die beiden Lösung $\mathrm{y}(t)$ und $\mathrm{z}(t)$ der Anfangswertprobleme

$$\boxed{\mathrm{y}'(t) = \mathrm{f}(t,\mathrm{y}(t)),\quad \mathrm{y}(t_0)=\mathrm{y}_0}$$
$$\boxed{\mathrm{z}'(t) = \mathrm{g}(t,\mathrm{z}(t)),\quad \mathrm{z}(t_1)=\mathrm{z}_0}$$

die Abschätzung

$$\begin{aligned} \|\mathrm{y}(t)-\mathrm{z}(t)\| \le\ & \|\mathrm{y}_0-\mathrm{z}_0\|\,e^{L|t-t_0|}+M\,|t_1-t_0|\,e^{L|t-t_0|} \\ & +\frac{\delta}{L}\left(e^{L|t-t_0|}-1\right) \end{aligned}$$

Nov 9-15:26

Eine Anwendung: **Parameterabhängige Anfangswertprobleme**

Wir betrachten dazu das Anfangswertproblem

$$\mathrm{y}'(t)=\mathrm{f}(t,\mathrm{y}(t),\lambda),\quad \mathrm{y}(t_0)=\mathrm{y}_0$$

d.h. die rechte Seite hängt von einem Parameter $\lambda\in\mathbb{R}^m$ ab.

Diese Problem lässt sich einfach auf den letzten Fall zurückführen:

$$\boxed{\begin{aligned} \mathrm{y}'(t) &= \mathrm{f}(t,\mathrm{y}(t),\mathrm{z}(t)), & \mathrm{y}(t_0)&=\mathrm{y}_0 \\ \mathrm{z}'(t) &= 0, & \mathrm{z}(t_0)&=\lambda \end{aligned}}$$

$\begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} f(\ ) \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix}(t_0) = \begin{pmatrix} y_0 \\ \lambda \end{pmatrix}$

Setzen wir $\mathrm{w}(t)=(\mathrm{y}(t),\mathrm{z}(t))^T$, so gilt mit

$$\mathrm{g}(t,\mathrm{w}(t))=(\mathrm{f}(t,\mathrm{w}(t)),0)^T$$

und $\mathrm{w}_0=(\mathrm{y}_0,\lambda)^T$, $\tilde{\mathrm{w}}_0=(\mathrm{y}_0,\tilde{\lambda})^T$ die Abschätzung

$$\boxed{\|\mathrm{w}(t;t_0,\mathrm{w}_0)-\mathrm{w}(t;t_0,\tilde{\mathrm{w}}_0)\|\le e^{L|t-t_0|}\cdot|\lambda-\tilde{\lambda}|}$$

$f=g$, $t_1=t_0$

$\left\|\begin{pmatrix} y_0 \\ \lambda \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} y_0 \\ \tilde{\lambda} \end{pmatrix}\right\| = |\lambda-\tilde{\lambda}|$ $\quad \left\|\begin{pmatrix} y_0 \\ \lambda \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} y_0 \\ \tilde{\lambda} \end{pmatrix}\right\|$

Nov 9-15:31

$$\frac{y(t+h;t_0,y_0)-y(t;t_0,y_0)}{h} \approx y'(t;t_0,y_0) = f(t,y(t;t_0,y_0))$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{1}{s}\left(\frac{y(t+h,t_0+s,y_0)-y(t,t_0+s,y_0)}{h} - \frac{y(t+h,t_0,y_0)-y(t,t_0,y_0)}{h}\right)$$

$$= \frac{1}{h}\left(\frac{y(t+h,t_0+s,y_0)-y(t+h,t_0,y_0)}{s} - \frac{y(t,t_0+s,y_0)-y(t,t_0,y_0)}{s}\right)$$

$$\approx \frac{1}{h}\left(\frac{\partial y}{\partial t_0}(t+h,t_0,y_0) - \frac{\partial y}{\partial t_0}(t,t_0,y_0)\right)$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{1}{s}\Big(f(t,y(t,t_0+h,y_0)) - f(t,y(t,t_0,y_0))\Big) =$$

$$\approx \frac{\partial f}{\partial y}(t,y(t,t_0,y_0))\,\frac{\partial y}{\partial t_0}(t,t_0,y_0)$$

$$\boxed{\left(\frac{\partial y}{\partial t_0}\right)' \approx \frac{\partial f}{\partial y}\,\frac{\partial y}{\partial t_0}}$$

$$w' \approx \frac{\partial f}{\partial y}\,w$$

Nov 9-15:32

Satz: (Fortsetzung)

2) Die Lösung $y(t;t_0,y_0)$ ist auf $I \times S_\alpha$ eine C^1–Funktion bezüglich **aller** Variablen.

3) Die so genannten Variationen

$$\boxed{Y(t) := \frac{\partial}{\partial y_0} y(t;t_0,y_0) \in \mathbb{R}^{n\times n}}$$

$$\boxed{w(t) := \frac{\partial}{\partial t_0} y(t;t_0,y_0) \in \mathbb{R}^{n}}$$

sind die Lösungen der linearen Anfangswertprobleme

$$\boxed{Y'(t) = f_y(t,y(t;t_0,y_0))\cdot Y(t),} \quad Y(t_0) = I_n$$

$$\boxed{w'(t) = f_y(t,y(t;t_0,y_0))\cdot w(t),} \quad w(t_0) = -f(t_0,y_0)$$

lineare Gl.

Nov 9-15:43