VO 2.11.09

$g(t,y) + h(t,y)y' = 0$

falls $\frac{\partial g}{\partial y} = \frac{\partial h}{\partial t} \Rightarrow \exists\, \phi(t,y)$

$\phi(t,y(t)) = C$ ist implizite Darst. d. Lsg.

falls $\frac{\partial g}{\partial y} \neq \frac{\partial h}{\partial t}$

$\underbrace{m(t,y)\,g(t,y)}_{\tilde g(t,y)} + \underbrace{m(t,y)\,h(t,y)}_{\tilde h(t,y)}y' = 0$

$\frac{\partial \tilde g}{\partial y} \overset{?}{=} \frac{\partial \tilde h}{\partial t}$

Spezialfälle:

a) $\left[\frac{\partial g}{\partial y} - \frac{\partial h}{\partial t}\right]/h$ nur t-abh.

b) $\left[\frac{\partial \tilde g}{\partial y} - \frac{\partial \tilde h}{\partial t}\right]/g$ nur y abh.

Nov 2-14:13

1.3 Elementare Lösungsmethoden für Differentialgleichungen zweiter Ordnung

Typ A: Gegeben sei eine Gleichung zweiter Ordnung der Form

$$y''(t) = f(t, y'(t))$$

Die rechte Seite der DGL hängt also nicht von $y(t)$ ab.

Setzen wir $z(t) := y'(t)$, so erhält man eine Gleichung **erster** Ordnung:

$$z'(t) = f(t, z(t))$$

Läßt sich diese Gleichung lösen, so folgt

$$y(t) = y(t_0) + \int_{t_0}^{t} z(\tau)d\tau$$

$\left.\begin{array}{l} y'' = 2 \\ y' = z \end{array}\right\}$ $z' = 2 \Rightarrow z = 2t + c_0$

$y = y_0 + \int_{t_0}^{t}(2s + c_0)ds = y_0 + \dots$

Nov 2-14:41

Beispiel: Die sogenannte **Kettenlinie** ist die Lösung der Gleichung

$$y''(t) = k\sqrt{1 + (y'(t))^2}$$

Die Subtitution $z(t) := y'(t)$ ergibt die Gleichung erster Ordnung

$$z'(t) = k\sqrt{1 + z^2(t)}$$

$\Rightarrow$ separierbar

Mittels Trennung der Variablen findet man

$$\text{arsh } z = \int \frac{dz}{\sqrt{1 + z^2(t)}} = k\int dt = kt + c_1$$

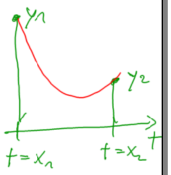
und daher

$$z(t) = \sinh(kt + c_1)$$

mit der Integrationskonstanten c_1.

Integration von $z(t)$ ergibt die Kettenlinie $y(t)$ in der Form

$$y(t) = \frac{1}{k}\cosh(kt + c_1) + c_2$$



Nov 2-14:47

Typ C: Betrachte man den Spezialfall einer autonome Gleichung der Form

$$y''(t) = f(y(t))$$

Man berechnet

$$\begin{aligned} y'y'' &= f(y)y' \\ \Rightarrow \quad \frac{1}{2}(y')^2 &= \int f(y)dy =: F(y) + C \\ \Rightarrow \quad y' &= \pm\sqrt{2(F(y) + C)} \end{aligned}$$

$\left(\frac{y'^2}{2}\right)' = (F(y))'$

Die Funktion $y(t)$ sei invertierbar (auf einem gewissen Bereich)

$$\frac{dt}{dy} = \pm\frac{1}{\sqrt{2(F(y) + C)}}$$

und man erhält $y(t)$ durch Auflösen von

$$t = t(y) = \pm\int \frac{dy}{\sqrt{2(F(y) + C)}}$$

$y'' = -y$

$\frac{1}{2}(y')^2 = -\int y\,dy = -\frac{y^2}{2} + c_2$

$y' = \pm\sqrt{c^2 - y^2}$

$t(y) = \pm\int \frac{dy}{\sqrt{c^2 - y^2}} = \pm \arcsin\frac{y}{c} + c_1$

$y = c\sin(t - c_1)$

Nov 2-14:57

Beispiel: Gegeben sei die **nicht** exakte Gleichung

$$\underbrace{(1 - ty)}_{g} + \underbrace{(ty - t^2)}_{h}y' = 0$$

$g_y = -t \neq y - 2t = h_t$

Es gilt:

$$\left(\frac{\partial h}{\partial t} - \frac{\partial g}{\partial y}\right)/h = \frac{y - t}{ty - t^2} = \frac{1}{t}$$

Ansatz:

$$\frac{dm}{dt} = -\frac{1}{t}\cdot m(t) \quad \Rightarrow \quad m(t) = \frac{1}{t}$$

Damit ist die Differentialgleichung

$$\overbrace{\left(\frac{1}{t} - y\right)}^{\tilde g} + \overbrace{(y - t)}^{\tilde h}y' = 0 \qquad (t \neq 0)$$

$\tilde g_y = -1 = -1 = \tilde h_t$

exakt und die (implizite) Lösung lautet

$$\Phi(t, y(t)) = \ln|t| - ty(t) + \frac{1}{2}y^2(t) = \text{ const.}$$

$\phi(t,y) = \int \tilde g(t,y)\,dt = \ln|t| - ty + C(y)$

$\frac{\partial \phi}{\partial y} = -t + C'(y) \overset{!}{=} \tilde h = y - t \Rightarrow C(y) = \frac{y^2}{2}$

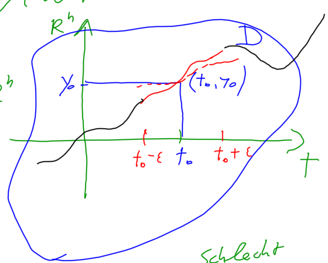
$\phi(t,y) = \ln|t| - ty - \frac{1}{2}y^2 \overset{!}{=} C$

Nov 2-14:37

Theorie AWP

$y' = f(t,y)$

$f: D \subset \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

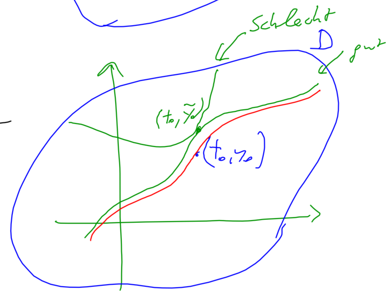


a) $\exists$ Lsg

b) eindeutig

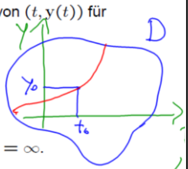
c) fortsetzen

d) abh. von Anfangsdaten



Nov 2-14:29

Bemerkung: Jede Lösung eines Anfangswertproblems lässt sich auf ein maximales Existenzintervall $-\infty \le t_{\min} < t < t_{\max} \le \infty$ fortsetzen. Der Graph $(t, y(t))$ der Lösung kommt dabei für $t \to t_{\min}$ bzw. $t \to t_{\max}$ dem Rand von D beliebig nahe, d.h. jeder Häufungspunkt von $(t, y(t))$ für $t \to t_{\min}$ bzw. $t \to t_{\max}$ liegt auf dem Rand ∂D.



Beispiel:

1) Die Lösung $y(t) = \exp(t)$ des Anfangswertproblems

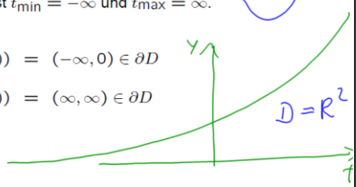
$$y' = y, \qquad y(0) = 1$$

ist auf ganz $\mathbb{R}$ definiert. Also ist $t_{\min} = -\infty$ und $t_{\max} = \infty$.

Es ist $D = \mathbb{R}^2$ und

$$\lim_{t \to t_{\min}} (t, y(t)) = (-\infty, 0) \in \partial D$$

$$\lim_{t \to t_{\max}} (t, y(t)) = (\infty, \infty) \in \partial D$$



Nov 2-15:13

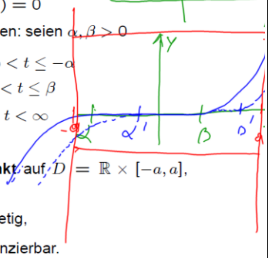
2.1 Existenz und Eindeutigkeit für Anfangswertaufgaben

Beispiel: Wir betrachten das Anfangswertproblem

$$y'(t) = \sqrt{|y(t)|}, \qquad y(0) = 0$$

Diese Gleichung besitzt **beliebig viele** Lösungen: seien $\alpha, \beta > 0$

$$y(t) = \begin{cases} -\frac{1}{4}(t+\alpha)^2 & : \; -\infty < t \le -\alpha \\ 0 & : \; -\alpha < t \le \beta \\ \frac{1}{4}(t+\beta)^2 & : \; \beta < t < \infty \end{cases}$$



Eigenschaften der rechten Seite:

1) Die rechte Seite ist **stetig** und **beschränkt** auf $D = \mathbb{R} \times [-a, a]$, $a > 0$,
2) Die rechte Seite ist dort **nicht** Lipschitz–stetig,
3) Die rechte Seite ist bei $y = 0$ **nicht** differenzierbar.

Nov 2-15:13

Lipschitz

$\exists L > 0 \quad |f(y_1) - f(y_2)| \le L\,|y_1 - y_2|$

$\forall y_1, y_2 \in U$

ist $f(y) = \sqrt{|y|}$ Lipschitz?

nein! Annahme f Lipschitz $\quad y_1, y_2 \ge 0,\; y_1 > y_2$

$|f(y_1) - f(y_2)| = \left|\sqrt{|y_1|} - \sqrt{|y_2|}\right| \le L\,|y_1 - y_2|$

$\dfrac{\left|\sqrt{y_1} - \sqrt{y_2}\right|}{|y_1 - y_2|} = \dfrac{\sqrt{y_1} - \sqrt{y_2}}{y_1 - y_2} = \dfrac{\sqrt{y_1} - \sqrt{y_2}}{(\sqrt{y_1} - \sqrt{y_2})(\sqrt{y_1} + \sqrt{y_2})} =$

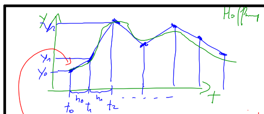
$= \underbrace{\dfrac{1}{\sqrt{y_1} + \sqrt{y_2}}}\ \cancel{\le}\ L \quad \forall y_1, y_2 \ge 0$

falsch ↯

wird beliebig groß $y_1, y_2 \to 0$

Nov 2-15:08

Hoffnung



$y' = f(t, y)$, also Steigung in (t_0, y_0) ist $f(t_0, y_0)$

in (t_1, y_1) $\quad f(t_1, y_1)$

Bspl $\quad y' = y \qquad h_i = h$

$y(t_0) = y_0$

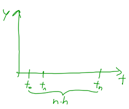
$y(t_1) = y_0 + h f(t_0, y_0) = y_0 + h y_0 = y_0 (1 + h)$

$y(t_2) = y_1 + h f(t_1, y_1) = y_1 + h y_1 = y_1 (1+h) = y_0 (1+h)^2$

$\vdots$

$y(t_n) = \;\ldots\ldots\; = y_0 (1+h)^n$

$t_n - t_0 = n \cdot h$



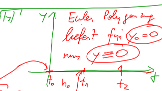
$y(t_n) = y_0 (1+h)^n = y_0 \left(1 + \dfrac{t_n - t_0}{n}\right)^n \xrightarrow{n \to \infty} y_0\, e^{t_n - t_0}$

Bspl $\quad f(y) = \sqrt{|y|}$

$y' = \sqrt{|y|}$

$y(0) = 0$

Euler Polygonzug liefert für $y_0 = 0$ nur $y \equiv 0$



$y'(0) = \sqrt{|0|} = 0$

$y'(t_1) = \sqrt{|0|} = 0$

Nov 2-15:23