Aufgabe 1)

a) Gegeben ist das Differentialgleichungssystem $\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y} + \boldsymbol{h}(t)$

$$\text{mit} \qquad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{h}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{y}(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}.$$

(i) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des homogenen Differentialgleichungssystems.

(ii) Bestimmen Sie mit Hilfe eines geeigneten Ansatzes eine partikuläre Lösung des inhomogenen Differentialgleichungssystems.

b) Gegeben ist die Randwertaufgabe

$$x^2 y'' - x\,y' + y = h(x) \qquad x \in]1,3[$$

$$y(1) + \alpha y'(1) = \gamma_1$$
$$y(3) - 3y'(3) = \gamma_2 \qquad \alpha, \gamma_1, \gamma_2 \in \mathbb{R}\,.$$

Die Funktionen

$$y_1(x) = x\,, \qquad y_2(x) = x \cdot \ln(x)$$

bilden ein Fundamentalsystem der zugehörigen homogenen Differentialgleichung.

Für welche Werte von α ist die Randwertaufgabe für beliebige $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathbb{R}$ und beliebige auf dem Intervall $[1,3]$ stetige Funktionen $h(x)$ eindeutig lösbar?

Aufgabe 2)

a) Bestimmen Sie mit Hilfe der Substitution $u := x - 2y$ die Lösung der Anfangswertaufgabe

$$y' = \exp(x - 2y) + 0.5, \qquad y(0) = 0\,.$$

b) Gegeben sei das lineare System

$$\boldsymbol{y}' = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 3 \\ -1 & -\gamma & 1 \\ 3 & 0 & -3 \end{pmatrix} \boldsymbol{y}\,.$$

Untersuchen Sie das Stabilitätsverhalten des stationären Punktes $(0,0,0)^T$ in Abhängigkeit von dem Parameter $\gamma \in \mathbb{R}$.

Viel Erfolg!