Aufgabe 1)

a) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$y'(x)\,(x^2+1) = (y(x)+5)\,2x\,.$$

b) Gegeben sei das Differentialgleichungssystem

$$\boldsymbol{y}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{3}{x^2} & \frac{1}{x} \end{pmatrix} \boldsymbol{y} \; + \; \begin{pmatrix} x \\ 3 \end{pmatrix} \qquad x \geq 0.5$$

Durch

$$Y(x) \; = \; \begin{pmatrix} -\frac{1}{x} & x^3 \\ \frac{1}{x^2} & 3x^2 \end{pmatrix}$$

ist ein Fundamentalsystem der zugehörigen homogenen Aufgabe gegeben.

(i) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der inhomogenen Aufgabe.

(ii) Bestimmen Sie die Lösung der zugehörigen Anfangswertaufgabe mit den Anfangswerten $y(1) = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Lösung zur Aufgabe 1)

a) Für $y \neq -5$ gilt

$$\frac{dy}{dx} = (y(x)+5)\,\frac{2x}{x^2+1} \;\Longrightarrow\; \int \frac{dy}{y+5} = \int \frac{2x}{x^2+1}\,dx$$

$$\Longleftrightarrow \ln(y+5) \; = \; \ln(x^2+1)+k \;\Longleftrightarrow\; y = -5 \; + \; c(x^2+1), \quad c \in \mathbb{R}$$

[3 Punkte]

b) (i) Zur Bestimmung der allgemeinen Lösung der inhomogenen Aufgabe machen wir den Ansatz $\boldsymbol{y}_p(x) := Y(x) \cdot \boldsymbol{c}(x)$ (Variation der Konstanten). Dies eingesetzt in die DGL liefert die Bedingung

$$Y(x)\begin{pmatrix} c_1'(x) \\ c_2'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{x} & x^3 \\ \frac{1}{x^2} & 3x^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1'(x) \\ c_2'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-c_1'}{x} + x^3 c_2' \\ \frac{c_1'}{x^2} + 3x^2 c_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} \frac{-3c_1'}{x} + 3x^3 c_2' & = 3x \\ \frac{c_1'}{x} + 3x^3 c_2' & = 3x \end{cases} \quad \Longrightarrow \frac{2}{x}c_1' = 0 \text{ z.B. } c_1 = 0$$

$$\Longrightarrow c_2' \; = \; \frac{1}{x^2} \qquad \text{z.B. } c_2 = -\frac{1}{x} \qquad \textbf{[3 Punkte]}$$

Damit erhalten wir die spezielle Lösung

$$\boldsymbol{y}_p(x) := Y(x) \cdot \boldsymbol{c}(x) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{x} & x^3 \\ \frac{1}{x^2} & 3x^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x^2 \\ -3x \end{pmatrix} \qquad \textbf{[1 Punkt]}$$

Die allgemeine Lösgung der inhomogenen Aufgabe lautet also

$$\boldsymbol{y}(x) = k_1 \begin{pmatrix} -\frac{1}{x} \\ \frac{1}{x^2} \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} x^3 \\ 3x^2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x^2 \\ 3x \end{pmatrix} \quad \textbf{[1 Punkt]}$$

(ii) Einsetzen der Anfangswerte liefert :

$$\begin{pmatrix} -k_1 + k_2 - 1 \\ k_1 + 3k_2 - 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \Longrightarrow k_2 = 2,\ k_1 = -1. \qquad \textbf{[2 Punkte]}$$

Aufgabe 2)

a) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung von

$$y'' + 5y' + 6y = te^{-t}.$$

b) Gegeben sei das Differentialgleichungssystem

$$\boldsymbol{y}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} y - e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Die Funktionen

$$\boldsymbol{y}^{[1]} := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{y}^{[2]} := \begin{pmatrix} \cos(t) - 1 \\ -1 - \sin(t) \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{y}^{[3]} := e^{2t} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 5 \\ -5 \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{y}^{[4]} := \begin{pmatrix} \sin(t) \\ \cos(t) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

sind Lösungen des zugehörigen homogenen Systems.

Prüfen Sie, ob diese Funktionen ein Fundamentalsystem bilden.

Lösung zur Aufgabe 2)

a) **Homogene Aufgabe:**
Charakteristisches Polynom: $\lambda^2 + 5\lambda + 6 = 0\,.$

Nullstellen des charakteristischen Polynoms:
$\lambda_1 = -2,\ \lambda_2 = -3\,.$

Allgemeine Lösung der homogenen Gleichung
$y_h(t) = c_1 e^{-2t} + c_2 e^{-3t}\,.$ **[2 Punkte]**

Partikuläre Lösung der inhomogenen Aufgabe:
Inhomogenität : Polynom 1. Grades $\times$ Exponentialfunktion.
Ansatz für eine partikuläre Lösung $y_p(t) = (at + b)\, e^{-t}\,.$ **[1 Punkt]**

Ableiten ergibt
$y_p'(t) = (a - b - at)\, e^{-t}\,,\quad y_p''(t) = (-a + b + at - a)\, e^{-t}\,.$ **[1 Punkt]**

Einsetzen in die Differentialgleichung liefert

$$\begin{aligned} & e^{-t}\left(-2a + b + at + 5\,(a - b - at) + 6\,(at + b)\right) = te^{-t} \\ \Leftrightarrow\ & (3a + 2b + 2at) = t \\ \Leftrightarrow\ & 3a + 2b = 0 \ \wedge \ 2a = 1 \\ \Leftrightarrow\ & a = \frac{1}{2},\ b = -\frac{3}{4}. \end{aligned}$$

[2 Punkte]

Die partikuläre Lösung lautet also $y_p(t) = \left(\frac{1}{2}t - \frac{3}{4}\right) e^{-t}$.

Allgemeine Lösung: Die allgemeine Lösung lautet damit

$$y(t) = \left(\frac{1}{2}t - \frac{3}{4}\right) e^{-t} + c_1 e^{-2t} + c_2 e^{-3t}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R} \text{ beliebig.} \quad [\textbf{1Punkt}]$$

b)

$$W(t) = \det \begin{pmatrix} 1 & \cos(t) - 1 & 3e^{2t} & \sin(t) \\ 1 & -1 - \sin(t) & e^{2t} & \cos(t) \\ 1 & -1 & 5e^{2t} & 0 \\ 1 & -1 & -5e^{2t} & 0 \end{pmatrix} \textbf{Ansatz: } [\textbf{1 Punkt}]$$

$$\Longrightarrow W(0) = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 5 & 0 \\ 1 & -1 & -5 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 5 \\ 1 & -1 & -5 \end{pmatrix} = (5+5) + 3(-1+1) = 10 \neq 0$$

Es handelt sich um ein Fundamentalsystem. **[2 Punkte]**