Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **WiSe 2008/09**
Prof. Dr. M. Hinze/ Dr. P. Kiani

Differentialgleichungen I für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Blatt 3

Aufgabe 1: Gegeben sei das Differentialgleichungssystem

$$y' = \frac{1}{x}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} y + \begin{pmatrix} 4x \\ x \end{pmatrix} \qquad x \geq 0.5$$

a) Zeigen Sie, dass durch

$$Y(x) \;=\; \begin{pmatrix} x^{-2} & x \\ -2x^{-2} & x \end{pmatrix}$$

ein Fundamentalsystem der zugehörigen homogenen Aufgabe gegeben ist.

b) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der inhomogenen Aufgabe.

c) Bestimmen Sie die Lösung der zugehörigen Anfangswertaufgabe mit den Anfangswerten $y(1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 2: Gegeben sei das Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x - 2y + z \\ \dot{y} &= \quad\; - y - z \\ \dot{z} &= \quad\;\; 4y + 3z\,. \end{aligned}$$

a) Sei $\mathbf{y} := (x, y, z)^T$. Schreiben Sie das System in Matrixschreibweise $\dot{\mathbf{y}} = A\mathbf{y}$ um.

b) Prüfen Sie, ob die Funktionen $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \mathbf{y}_3$ bzw. $\tilde{\mathbf{y}}_1, \tilde{\mathbf{y}}_2, \tilde{\mathbf{y}}_3$ ein Fundamentalsystem des Differentialgleichungssystems bilden.

$$\mathbf{y}_1(t) = e^t \begin{pmatrix} 2t^2 + t \\ -t \\ 2t + 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{y}_2(t) = e^t \begin{pmatrix} 4t \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{y}_3(t) = e^t \begin{pmatrix} 8t^2 \\ 1 - 4t \\ 2 + 8t \end{pmatrix},$$

$$\tilde{\mathbf{y}}_1(t) = e^t \begin{pmatrix} 1 - 2t \\ 0.5 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{y}}_2(t) = e^t \begin{pmatrix} 4t \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{y}}_3(t) = e^t \begin{pmatrix} 8t^2 \\ 1 - 4t \\ 2 + 8t \end{pmatrix},$$

Aufgabe 3:

a) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des linearen Differentialgleichungssystems

$$\mathbf{y}' = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 4 \end{pmatrix} \mathbf{y}\,.$$

b) Bestimmen Sie die Lösung der zugehörigen Anfangswertaufgabe mit $\mathbf{y}(0) = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 4: Gegeben sei das Differentialgleichungssystem

$$\mathbf{y}' = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix} \mathbf{y} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 + e^{2\,t} \end{pmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie ein (reelles) Fundamentalsystem des zugehörigen homogenen Differentialgleichungssystems.

b) Bestimmen Sie (mittels geeigneter Ansätze) eine partikuläre Lösung und damit auch die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems.

Aufgabe 5:

Eine Katze jagt in der (x, y)–Ebene eine Maus. Dabei läuft sie stets mit betragsmäßig konstanter Geschwindigkeit v_K mit $\|v_K\| = 2$ direkt auf die Maus zu. Die Maus ihrerseits läuft auf direktem Wege mit der betragsmäßig konstanten Geschwindigkeit v_M mit $\|v_M\| = 1$ auf ihr Loch, welches sich im Punkt $(0, 1)^T$ befindet, zu. Zur Zeit $t = 0$ befindet sich die Maus im Punkt $(0, 0)^T$ und die Katze im Punkt $(1, 0)^T$.

a) Stellen Sie ein Differentialgleichungssystem auf, das die Bahn $(x(t), y(t))^T$ der Katze beschreibt.

b) Machen Sie sich klar, dass das Modell nur für $t \in [0,1]$ gelten kann. Überlegen Sie dann, ob die Lösung des Differentialgleichungssystems für beliebige $t \in [0,1]$ existiert. Prüfen Sie insbesondere, ob die rechten Seiten der Differentialgleichungen für beliebige $t \in [0,1]$ existieren.

   Hinweise: Zeigen Sie mit Hilfe der Kettenregel aus Analysis III, dass für den Abstand $D(t)$ von Katz und Maus folgende Differentialgleichung gilt:

$$\frac{d}{dt} D = \sqrt{D}\,(\dot{y} - 4)\,.$$

   Falls die Maus zum Zeitpunkt t_f gefangen wird, gilt dort einerseits $D = 0$ und andererseits $\dot{D} = 0$.

c) **freiwillige Zusatzaufgabe :** Berechnen Sie mit Hilfe eines Integrators (etwa ode45 aus Matlab), wann und wo sich die Katze bis auf 10^{-5} Längeneinheiten der Maus genähert haben wird, und plotten Sie die Bahnen von Katze und Maus.

   Hinweis: Beachten Sie Teil b). Schauen Sie nicht zu weit in die Zukunft, sonst verschwinden Katz und Maus auf nimmer Wiedersehen!

   Matlab kann mit der Eingabe

   Ctrl C

   unterbrochen werden!

Abgabetermine: 1.12-5.12.2008