Differentialgleichungen I

Michael Hinze
(zusammen mit Peywand Kiani)

Department Mathematik
Schwerpunkt Optimierung und Approximation, Universität Hamburg

6. Januar 2009

Beachtenswertes

- **Die Veranstaltung ist eng angelehnt an das Buch Höhere Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler von Prof. Dr. Günter Bärwolff, Spektrum Akademischer Verlag, ASIN/ISBN: 3827414369.**
- **Übungsaufgaben → http://www.math.uni-hamburg.de/teaching/export/tuhh/cm/**
- **Besuch der Übungsgruppen gründlich vorbereiten!!**
- **Übungshefte: Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler, H. Wenzel / G. Heinrich, ab 4ter Auflage, gibt es bei Teubner Stuttgart/Leipzig.**
- **Als Formelsammlung empfehlen wir: Formeln und Fakten im Grundkurs Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler, Klaus Vetters, 3. Auflage, Teubner 2001.**

Übungsaufgaben für die kommenden beiden Wochen

Siehe WWW Seiten der Veranstaltung:
http://www.math.uni-hamburg.de/teaching/export/tuhh/cm/

Buch Kap. 6.14 – Stabilität autonomer DGLen

Satz 6.14: (Stabilität linearer autonomer Systeme) Der Gleichgewichtszustand des linearen Systems $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$ ist

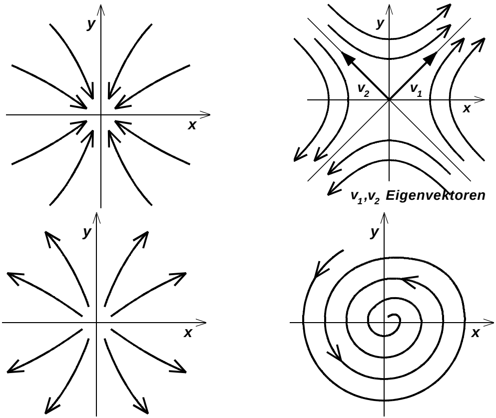
a) **asymptotisch stabil, falls alle Eigenwerte von A negative Realteile haben,**

b) **stabil, falls kein Eigenwert von A einen positiven Realteil hat, und**

   für Eigenwerte mit dem Realteil Null die geometrische gleich der algebraischen Vielfachheit ist,

c) **instabil, falls ein Eigenwert von A einen positiven Realteil hat oder ein Eigenwert von A mit dem Realteil Null existiert, dessen geometrische Vielfachheit kleiner als die algebraische Vielfachheit ist.**

Buch Kap. 6.14 – Stabilität



Abbildungen 6.22-6.25: Eigenwerte $\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 < 0$ (ol), $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 < 0$ (or), $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$ (ul), $\lambda = a + ib$, $a < 0$ (ur).

Buch Kap. 6.14 – Stabilität nichtlinearer autonomer Systeme

Satz 6.15:(Stabilität nichtlinearer autonomer Systeme) Der Gleichgewichtszustand x_0 des nichtlinearen autonomen Systems $\dot{x} = F(x)$ ist asymptotisch stabil, wenn alle Eigenwerte der Ableitungsmatrix $F'(x_0)$ einen negativen Realteil haben. Der Gleichgewichtspunkt x_0 ist instabil, wenn mindestens ein Eigenwert von $F'(x_0)$ einen positiven Realteil hat.

Buch Kap. 6.13 – Randwertaufgaben 2ter Ordnung

Auf $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$ seien $a_0 \neq 0$, a_1, a_2 und r vorgegebene stetige Funktionen, $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \gamma_1, \gamma_2 \in \mathbb{R}$ mit $\alpha_i^2 + \beta_i^2 > 0$ ($i = 1{,}2$) und für $y \in C^2(I)$ (= 2 mal stetig auf I differenzierbare Funktionen) sei

$$D[y] := a_0 y'' + a_1 y' + a_2 y, \quad R_1(y) := \alpha_1 y(a) + \beta_1 y'(a)$$
$$\text{und } R_2(y) := \alpha_2 y(b) + \beta_2 y'(b).$$

Dann heißt die Aufgabe *Finde* $y \in C^2(I)$ *mit*

$$D[y] = r \text{ und } R_1(y) = \gamma_1,\ R_2(y) = \gamma_2$$

Randwertaufgabe 2ter Ordnung für y.

Buch Kap. 6.13 – Randwertaufgaben 2ter Ordnung

Seien y_1, y_2 ein Fundamentalsystem und y_p partikuläre Lösungder DGL

$$D[y] = a_0 y'' + a_1 y' + a_2 y = r,$$

sowie

$$r_1 := \gamma_1 - \alpha_1 y_p(a) - \beta_1 y_p'(a) \text{ und } r_2 := \gamma_2 - \alpha_2 y_p(b) - \beta_2 y_p'(b).$$

Satz: Ist das lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} R_1(y_1) & R_1(y_2) \\ R_2(y_1) & R_2(y_2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix}$$

lösbar, so besitzt die Randwertaufgabe

$$D[y] = r \text{ und } R_1(y) = \gamma_1,\; R_2(y) = \gamma_2$$

eine Lösung $y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + y_p$. Diese ist eindeutig, gdw

$$\text{die Matrix } \begin{pmatrix} R_1(y_1) & R_1(y_2) \\ R_2(y_1) & R_2(y_2) \end{pmatrix}$$

regulär ist.