Differentialgleichungen I

Michael Hinze
(zusammen mit Peywand Kiani)

Department Mathematik
Schwerpunkt Optimierung und Approximation, Universität Hamburg

5. Januar 2009

Beachtenswertes

- **Die Veranstaltung ist eng angelehnt an das Buch Höhere Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler von Prof. Dr. Günter Bärwolff, Spektrum Akademischer Verlag, ASIN/ISBN: 3827414369.**
- **Übungsaufgaben → http://www.math.uni-hamburg.de/teaching/export/tuhh/cm/**
- **Besuch der Übungsgruppen gründlich vorbereiten!!**
- **Übungshefte: Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler, H. Wenzel / G. Heinrich, ab 4ter Auflage, gibt es bei Teubner Stuttgart/Leipzig.**
- **Als Formelsammlung empfehlen wir: Formeln und Fakten im Grundkurs Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler, Klaus Vetters, 3. Auflage, Teubner 2001.**

Übungsaufgaben für die kommenden beiden Wochen

Siehe WWW Seiten der Veranstaltung:
http://www.math.uni-hamburg.de/teaching/export/tuhh/cm/

Buch Kap. 6.14 – Nichtlineare Differentialgleichungen

Satz 6.17: (Existenz und Einzigkeit der Lösung eines AWPs) Sei $f : B \subset \mathbb{R}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ stetig partiell differenzierbar und der Punkt (x_0, t_0) liege im Inneren von B.
Dann gibt es ein Intervall $]t_0 - h, t_0 + h[$, auf dem eine eindeutige Lösung $\mathrm{x}(t)$ des dynamischen Systems

$$\dot{x} = f(t, x)$$

existiert, welche die Anfangsbedingung $\mathrm{x}(t_0) = \mathrm{x}_0$ erfüllt.

Siehe auch Satz 6.1, welcher den Fall $n = 1$ behandelt.

Den Raum der Lösungskurven x nennt man Phasenraum und die Lösungskurven auch Phasenkurven, vergleiche Def. 6.14.

Buch Kap. 6.14 – Autonome Systeme

Definition 6.15: (autonomes System) Hängt die Abbildung f des dynamischen Systems nicht von t ab, d.h. gilt

$$\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x})$$

mit $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$, dann heißt das System autonom.

Punkte $x_0 \in \mathbb{R}^n$ mit der Eigenschaft $f(x_0) = 0$ heißen Gleichgewichtspunkte des autonomen Systems.

Buch Kap. 6.14 – Räuber-Beute Diagramme

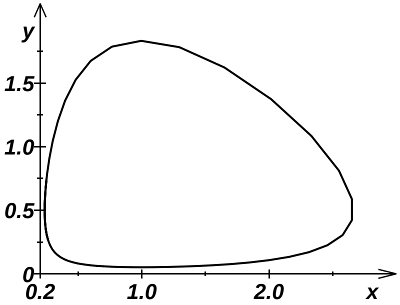


Abbildung 6.19, 6.20: Phasenkurve des Räuber-Beute Systems (links), zeitliche Entwicklung der Populationen *x* und *y* des Räuber-Beute Systems

Buch Kap. 6.14 – Autonome Systeme, Stabilität

Definition 6.16: Ein Gleichgewichtspunkt $\mathbf{x}_0$ eines autonomen Systems $\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x})$ heißt

a) **attraktiv, falls Lösungen $\mathbf{x}(t)$, die in der Nähe von $\mathbf{x}_0$ starten, gegen den Gleichgewichtspunkt konvergieren. D.m. es gibt $\delta > 0$, s.d.**

$$\lim_{t\to\infty} \mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_0$$

für jede Lösung $\mathbf{x}(t)$ mit $|\mathbf{x}(0) - \mathbf{x}_0| < \delta$,

b) **stabil, falls Lösungen $\mathbf{x}(t)$, die in der Nähe von $\mathbf{x}_0$ starten, in der Nähe von $\mathbf{x}_0$ bleiben. D.m. zu jedem $\epsilon > 0$ ex. ein $\delta > 0$, s.d. für Lösungen mit $|\mathbf{x}(0) - \mathbf{x}_0| < \delta$ schon**

$$|\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_0| < \epsilon \text{ für alle } t > 0 \text{ folgt,}$$

c) **asymptotisch stabil, falls er attraktiv und stabil ist, und**

d) **instabil, falls es Lösungen gibt, die sich von x_0 entfernen, auch wenn sie in der Nähe von $\mathbf{x}_0$ starten.**

Buch Kap. 6.14 – Stabilität autonomer DGLen

Satz 6.14: (Stabilität linearer autonomer Systeme) Der Gleichgewichtszustand des linearen Systems $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$ ist

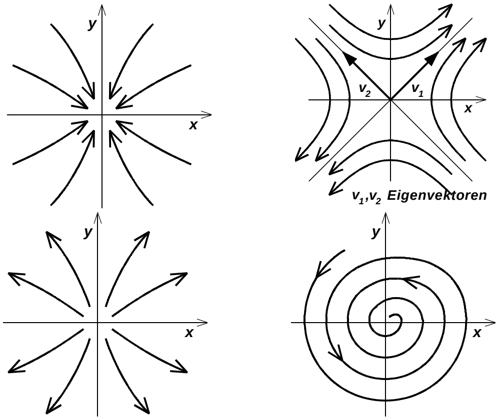
a) **asymptotisch stabil, falls alle Eigenwerte von A negative Realteile haben,**

b) **stabil, falls kein Eigenwert von A einen positiven Realteil hat, und**

   für Eigenwerte mit dem Realteil Null die geometrische gleich der algebraischen Vielfachheit ist,

c) **instabil, falls ein Eigenwert von A einen positiven Realteil hat oder ein Eigenwert von A mit dem Realteil Null existiert, dessen geometrische Vielfachheit kleiner als die algebraische Vielfachheit ist.**

Buch Kap. 6.14 – Stabilität



Abbildungen 6.22-6.25: Eigenwerte $\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 < 0$ (ol), $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 < 0$ (or), $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$ (ul), $\lambda = a + ib$, $a < 0$ (ur).

Buch Kap. 6.14 – Stabilität nichtlinearer autonomer Systeme

Satz 6.15:(Stabilität nichtlinearer autonomer Systeme) Der Gleichgewichtszustand x_0 des nichtlinearen autonomen Systems $\dot{x} = F(x)$ ist asymptotisch stabil, wenn alle Eigenwerte der Ableitungsmatrix $F'(x_0)$ einen negativen Realteil haben. Der Gleichgewichtspunkt x_0 ist instabil, wenn mindestens ein Eigenwert von $F'(x_0)$ einen positiven Realteil hat.