05.01.09

Autonome Systeme, Stabilität

Sei $F: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. (ein DGL-System

$$\dot{x} = F(x)$$
$$x(0) = x_0$$

heißt autonom (da es nicht explizit in F von t abhängt).

<u>Bsp</u>: Räuber/Beute

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \qquad a, b, c, d > 0$$

$$\left.\begin{aligned} \dot{x}_1 &= a x_1 - b x_1 x_2 \\ \dot{x}_2 &= c x_1 x_2 - d x_2 \end{aligned}\right\} = F(x) \quad \begin{aligned} &\text{Beute} \\ &\text{Räuber} \end{aligned}$$

① $\dot{x} = 0$, d.h. keine Änderungen in den Populationen x_1, x_2:

$$0 = a\bar{x}_1 - b\,\bar{x}_1\bar{x}_2$$
$$0 = c\,\bar{x}_1\bar{x}_2 - d\,\bar{x}_2$$

$$\to \quad \bar{x}_1 = \frac{d}{c} \qquad \bar{x}_2 = \frac{a}{b}$$

$F(\bar{x}) = F(\bar{x}_1, \bar{x}_2) = 0$. Dann heißt $\bar{x}$ "Gleichgewicht"

<u>Erhaltungsgrößen</u>: $E(x) \equiv$ const

$E(x_1, x_2) \equiv$ const auf einer Lösungskurve. Dann heißt E "Erhaltungsgröße"

050109

Bei Räuber/Beute:

$$E(x_1,x_2) := d \ln x_1 + a \ln x_2 - c x_1 - b x_2 \equiv \text{const},$$

denn

$$d\frac{\dot x_1}{x_1} + a\frac{\dot x_2}{x_2} \overset{\text{DGL System}}{=} ad - bd x_2 + ac x_1 - ad$$

$$= c(a x_1 - b x_1 x_2) + b(c x_1 x_2 - d x_2)$$

$$= c\dot x_1 + b \dot x_2$$

Integration liefert

$$\underbrace{d \int \frac{\dot x_1}{x_1}}_{\ln x_1} + \overbrace{a \int \frac{\dot x_2}{x_2}}^{\ln x_2} = c x_1 + b x_2 + \text{const}.$$

(1) Also E Erhaltungsgröße.

E konstant auf Lösungskurven!

d.h. Lösungskurven sind Niveaulinien von E in x_1-x_2 Ebene.

Hier: geschlossene Kurven

Sei T Periode eines Umlaufs.

Damit

$$\frac{1}{T}\int_0^T \frac{\dot x_1}{x_1}\,dt = \frac{1}{T}\left[\ln x(T) - \ln x(0)\right] = 0$$

$$\frac{1}{T}\int_0^T a - b x_2 \, dt \quad = 0$$

$$\rightarrow \frac{1}{T}\int_0^T x_2 \, dt = \frac{a}{b} = \overline{x_2}$$

050109

Analog: $\frac{1}{T}\int_0^T x_1 \, dt = \frac{d}{c} = \bar{x}_1$

d.h. im Mittel ändern sich die Populationen nicht.

Anwendung: Was passiert, falls Pflanzenschutzmittel eingebracht wird (x_1 Beute = Läuse, x_2 Räuber = Maikäfer)

Neues System

$$\dot{x}_1 = a x_1 - b x_1 x_2 - \overbrace{\varepsilon x_1}^{\text{Pflanzenschutz}}$$

$$\dot{x}_2 = c x_1 x_2 - d x_2 - \underbrace{\tilde{\varepsilon} x_2}_{\text{Pflanzenschutz}}$$

tötet Mai-Käfer.

③ Damit jetzt

$$\bar{x}_1 = \frac{d+\tilde{\varepsilon}}{c} = \frac{1}{T}\int_0^T x_1 \, dt$$

$$\bar{x}_2 = \frac{a-\varepsilon}{b} = \frac{1}{T}\int_0^T x_2 \, dt$$

Volterra Effekt

Weiteres Bsp. für Erhaltungsgrößen: Massenerhaltung

$$F(x) = m\ddot{x} \, .$$

Sei $p := m\dot{x} \rightarrow \dot{p} = \underbrace{m\ddot{x}}_{F(x)}$

Also $\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{m} p \\ F(x) \end{bmatrix} = G(x,p)$

050109

Sei $U(x)$ mit $U'(x) = -F(x)$

Betrachte $E(x,p) := \underbrace{U(x)}_{\text{pot. Energie}} + \underbrace{\frac{1}{2m}p^2}_{\text{kin. Energie}}$

$$\frac{d}{dt} E(x,p) = E_x \dot{x} + E_p \dot{p}$$

$$= U'(x)\dot{x} + \frac{p}{m}\dot{p}$$

$$= -F(x)\dot{x} + \dot{x}F(x) = 0$$

$\Rightarrow \quad E \equiv \text{const},$

was zu erwarten war.

④ Stabilität

$\bar{x}$ mit $F(\bar{x}) = 0$ heißt Gleichgewicht des Systems

$$\dot{x} = F(x)$$

Spezialfall

$\dot{x} = Ax \qquad A$ $(n \times n)$-Matrix

Dann $\bar{x} = 0$ Gleichgewicht

Allgemeine Lösung

$x(t) =$ Linearkombination von Fundamentallösungen.

050109

Sei λ EW und v EV:

$e^{\lambda t} v$ Fundamentallsg.

Algebraische Vielfachheit

> geom. Vielfachheit

$t^k e^{\lambda t} v$ Fundamental-lösung

mit v Hauptvektor

Es gilt:

$$\lim_{t \to \infty} t^k e^{\lambda t} = \begin{cases} \infty, & \lambda \geq 0 \quad \text{instabil} \\ 0, & \lambda < 0 \quad \text{stabil} \end{cases}$$

(5)

Komplexer Fall $\lambda = a + ib$

$$e^{\lambda t} = e^{at} e^{ibt}$$

$$\Rightarrow |e^{\lambda t}| = e^{at}$$

Gilt $\mathrm{Re}\,\lambda < 0$, so

$$\lim_{t \to \infty} e^{\lambda t} = 0 \quad \text{stabil}$$

$\mathrm{Re}\,\lambda = 0$, so

$$|e^{\lambda t}| = \text{const} \quad \text{stabil}$$

$\mathrm{Re}\,\lambda > 0$, so

$$\lim_{t \to \infty} |e^{\lambda t}| = \infty \quad \text{instabil}$$