Differentialgleichungen I

Michael Hinze
(zusammen mit Peywand Kiani)

Department Mathematik
Schwerpunkt Optimierung und Approximation, Universität Hamburg

Universität Hamburg

8. Dezember 2008

Beachtenswertes

- **Die Veranstaltung ist eng angelehnt an das Buch Höhere Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler von Prof. Dr. Günter Bärwolff, Spektrum Akademischer Verlag, ASIN/ISBN: 3827414369.**
- **Übungsaufgaben → http://www.math.uni-hamburg.de/teaching/export/tuhh/cm/**
- **Besuch der Übungsgruppen gründlich vorbereiten!!**
- **Übungshefte: Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler, H. Wenzel / G. Heinrich, ab 4ter Auflage, gibt es bei Teubner Stuttgart/Leipzig.**
- **Als Formelsammlung empfehlen wir: Formeln und Fakten im Grundkurs Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler, Klaus Vetters, 3. Auflage, Teubner 2001.**

Übungsaufgaben für die kommenden beiden Wochen

Siehe WWW Seiten der Veranstaltung:
http://www.math.uni-hamburg.de/teaching/export/tuhh/cm/

Buch Kap. 6.8 – charakteristisches Polynom

Definition 6.5: Bezeichne

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_0 y = g$$

eine lineare Differentialgleichung $n-$ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten. Dann heißt

$$P(\lambda) := \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_0$$

charakteristisches Polynom der homogenen Differentialgleichung (d.h. der DGL mit $g \equiv 0$)

und

$$P(\lambda) = 0$$

heißt die zugehörige charakteristische Gleichung.

Buch Kap. 6.8 – einfachen Inhomogenitäten, Resonanz

Definition 6.6: In Verallgemeinerung des Resonanzfalles eines Schwingungsproblems wollen wir von Resonanz sprechen, falls die rechte Seite oder ein Summand der rechten Seite der Differentialgleichung

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_0 y = g(x)$$

Fundamentallösung der homogenen Differentialgleichung

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_0 y = 0$$

ist.

Buch Kap. 6.8 – Ansätze für partikuläre Lösungen

<table>
<tr><th>$g(x)$</th><th>Ansatz für $y_p(x)$</th><th>Ansatz im Resonanzfall</th></tr>
<tr><td>$R_m(x)$</td><td>$T_m(x)$</td><td rowspan="3">Ist ein Summand des Ansatzes Lösung der homog. Gleichung, wird der Ansatz so oft mit x multipliziert, bis kein Summand mehr Lösung der homogenen Gleichung ist.</td></tr>
<tr><td>$R_m(x)e^{\alpha x}$</td><td>$T_m(x)e^{\alpha x}$</td></tr>
<tr><td>$R_m(x)\sin(\beta x)$
$R_m(x)\cos(\beta x)$</td><td>$T_m(x)\sin(\beta x)$
$+Q_m(x)\cos(\beta x)$</td></tr>
<tr><td>Kombination d. Funktionen</td><td>Kombination d. Ansätze</td><td>Obige Regel nur auf den Teil des Ansatzes anwenden, der den Resonanzfall enthält.</td></tr>
</table>

Buch Kap. 6.8 – Numerische Lösungsmethoden

Die Methode von EULER

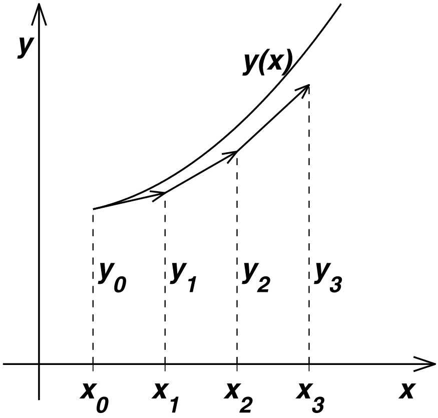

Abbildung 6.8: Explizite EULER**—Methode**

Buch Kap. 6.10 – Numerische Lösungsmethoden

Definition 6.7 (lokaler Diskretisationsfehler): Unter dem lokalen Diskretisationsfehler an der Stelle x_{k+1} versteht man den Wert

$$d_{k+1} := y(x_{k+1}) - y(x_k) - h\Phi(x_k, y(x_k), y(x_{k+1}), h).$$

Dabei bezeichnet Φ die Verfahrensfunktion des verwendeten Zeitintegrationsverfahrens.

Der lokale Diskretisierungsfehler beschreibt den Fehler, der entsteht, falls die exakte Lösung der Differentialgleichung in die Verfahrensfunktion eingesetzt wird. Er macht demnach eine Aussage über die Konsistenz des verwendeten Integrationsverfahrens.

Definition 6.8 (globaler Diskretisationsfehler) Unter dem globalen Diskretisationsfehler g_k an der Stelle x_k versteht man den Wert

$$g_k := y(x_k) - y_k \ .$$

Der globale Diskretisierungsfehler gibt den tatsächlichen Fehler an zwischen numerisch mit Hilfe des Integrationsverfahrens ermittelter Näherungslösung und exakter Lösung der DGL.