Differentialgleichungen I

Michael Hinze
(zusammen mit Peywand Kiani)

Department Mathematik
Schwerpunkt Optimierung und Approximation, Universität Hamburg

1. Dezember 2008

Beachtenswertes

- **Die Veranstaltung ist eng angelehnt an das Buch Höhere Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler von Prof. Dr. Günter Bärwolff, Spektrum Akademischer Verlag, ASIN/ISBN: 3827414369.**
- **Übungsaufgaben $\rightarrow$ http://www.math.uni-hamburg.de/teaching/export/tuhh/cm/**
- **Besuch der Übungsgruppen gründlich vorbereiten!!**
- **Übungshefte: Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler, H. Wenzel / G. Heinrich, ab 4ter Auflage, gibt es bei Teubner Stuttgart/Leipzig.**
- **Als Formelsammlung empfehlen wir: Formeln und Fakten im Grundkurs Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler, Klaus Vetters, 3. Auflage, Teubner 2001.**

Übungsaufgaben für die kommenden beiden Wochen

Siehe WWW Seiten der Veranstaltung:
http://www.math.uni-hamburg.de/teaching/export/tuhh/cm/

Buch Kap. 6.8 – Inhomogene Differentialgleichungen 2-ter Ordnung

Die allgemeine Lösung der DGL

$$y''(x) + a(x)y'(x) + b(x)y(x) = g(x)$$

hat die Form

$$y(x) = \left[C_1 - \int \frac{y_2(x)g(x)}{W(x)}dx\right] y_1(x) + \left[C_2 + \int \frac{y_1(x)g(x)}{W(x)}dx\right] y_2(x),$$

wobei y_1, y_2 ein Fundamentalsystem der homogenen Gleichung bildet.

Diese Lösungsdarstellung gilt natürlich auch für konstante Koeffizienten.

Buch Kap. 6.6 – Reduktion der Ordnung bei DGLen

Sei $u(x) \neq 0$ eine Lösung der linearen Differentialgleichung $n-$ter Ordnung

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_0(x)y = 0 \ .$$

Dann führt der Produktansatz

$$y(x) = v(x)u(x)$$

auf eine homogene lineare Differentialgleichung der Ordnung $n - 1$ für $w := v'$;

$$w^{(n-1)} + b_{n-1}(x)w^{(n-2)} + \ldots + b_1(x)w = 0 \ .$$

Ist $w_1, \ldots, w_{n-1}$ ein Fundamentalsystem dieser reduzierten Differentialgleichung $(n-1)$-ter Ordnung und bezeichnen $v_1, \ldots, v_{n-1}$ Stammfunktionen von $w_1, \ldots, w_{n-1}$, so bilden

$$u, uv_1, \ldots, uv_{n-1}$$

ein Fundamentalsystem der Ausgangs – Differentialgleichung.

Buch Kap. 6.8 – charakteristisches Polynom

Definition 6.5: Bezeichne

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_0 y = g$$

eine lineare Differentialgleichung $n-$ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten. Dann heißt

$$P(\lambda) := \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_0$$

charakteristisches Polynom der homogenen Differentialgleichung (d.h. der DGL mit $g \equiv 0$)

und

$$P(\lambda) = 0$$

heißt die zugehörige charakteristische Gleichung.

Buch Kap. 6.8 – einfachen Inhomogenitäten, Resonanz

Definition 6.6: In Verallgemeinerung des Resonanzfalles eines Schwingungsproblems wollen wir von Resonanz sprechen, falls die rechte Seite oder ein Summand der rechten Seite der Differentialgleichung

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_0 y = g(x)$$

Fundamentallösung der homogenen Differentialgleichung

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_0 y = 0$$

ist.

Buch Kap. 6.8 – Ansätze für partikuläre Lösungen

$g(x)$	Ansatz für $y_p(x)$	Ansatz im Resonanzfall
$R_m(x)$	$T_m(x)$	**Ist ein Summand des Ansatzes Lösung der homog. Gleichung, wird der Ansatz so oft mit x multipliziert, bis kein Summand mehr Lösung der homogenen Gleichung ist.**
$R_m(x)e^{\alpha x}$	$T_m(x)e^{\alpha x}$	
$R_m(x)\sin(\beta x)$ $R_m(x)\cos(\beta x)$	$T_m(x)\sin(\beta x)$ $+Q_m(x)\cos(\beta x)$	
Kombination d. Funktionen	**Kombination d. Ansätze**	**Obige Regel nur auf den Teil des Ansatzes anwenden, der den Resonanzfall enthält.**