031108

Differentialgleichungssysteme

i) Symbiotische Prozesse

$P(t)$, $Q(t)$ Populationen

$P(t_0) = P_0$, $Q(t_0) = Q_0$

Ausgangspopulationen

Symbiose: Populationen fördern sich gegenseitig

Modell:

$$P'(t) = \alpha\, Q(t)$$
$$Q'(t) = \beta\, P(t)$$
$$P(t_0) = P_0, \quad Q(t_0) = Q_0$$

$\alpha, \beta > 0$ Konstanten

1

In Matrixform

$$\begin{bmatrix} P(t) \\ Q(t) \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} 0 & \alpha \\ \beta & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P(t) \\ Q(t) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} P(t_0) \\ Q(t_0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_0 \\ Q_0 \end{bmatrix}$$

System ist von der Form

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}' = A(t) \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} y_1(t_0) \\ \vdots \\ y_n(t_0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_{01} \\ \vdots \\ y_{0n} \end{bmatrix}$$

mit $A(t) = A = \begin{bmatrix} 0 & \alpha \\ \beta & 0 \end{bmatrix}$

und $n = 2$, $y_1 = P$, $y_2 = Q$.

031108

ii) Räuber-Beute Modell

$P(t)$ Räuber-Population

$Q(t)$ Beute-Population

$P(t_0) = P_0 \quad Q(t_0) = Q_0$

<u>Beobachtung</u>: P ist auf Q angewiesen, weil P sonst ausstirbt. Q würde ungehemmt wachsen, falls P nicht vorhanden.

Modell

$$P'(t) = -\alpha_1 P(t) + \beta_1 P(t) Q(t)$$

$$Q'(t) = \alpha_2 Q(t) - \beta_2 P(t) Q(t)$$

$P(t_0) = P_0, \quad Q(t_0) = Q_0$

② Als DGL-System

$$\begin{bmatrix} P(t) \\ Q(t) \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} -\alpha_1 & \beta_1 P(t) \\ -\beta_2 Q(t) & \alpha_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P(t) \\ Q(t) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} P(t_0) \\ Q(t_0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_0 \\ Q_0 \end{bmatrix}$$

<u>Hier</u>: nichtlineares System von Differentialgleichungen mit Anfangswerten.

<u>Lineare</u> <u>DGL-Systeme</u> <u>erster</u> <u>Ordnung</u>

$$y'(t) = \begin{bmatrix} y_1'(t) \\ \vdots \\ y_n'(t) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} a_{11}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1}(t) & \cdots & a_{nn}(t) \end{bmatrix}}_{=: A(t)} \begin{bmatrix} y_1(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} g_1(t) \\ \vdots \\ g_n(t) \end{bmatrix}}_{g(t) :=}$$

031108

heißt inhomogenes DGL-System erster Ordnung. Ist

$$g(t) = \begin{bmatrix} g_1(t) \\ \vdots \\ g_n(t) \end{bmatrix} = 0,$$

so heißt das System homogen.

Kurz: $y' = A(t)y + g$

mit Anfangswert

$$y(t_0) = y_0 = \begin{bmatrix} y_{01} \\ \vdots \\ y_{0n} \end{bmatrix}.$$

Beachte: $n = 1$ liefert lineare DGL erster Ordnung 2 bereits behandelt.

③ Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen

Die Matrix $A(t)$ (d.h. die Komponentenfunktionen $a_{ij}(t)$) seien stetig auf $[a,b]$, ebenso $g(t)$. Dann besitzt

$$y' = A(t)y + g(t)$$

eine Lösung, welche bei Vorgabe eines Anfangswertes y_0, d.h. $y(t_0) = y_0$, stetig ist und eindeutig bestimmt.

Idee: $y' = A(t)y + g(t) \equiv f(t, y(t))$
mit $f(t, y) = A(t)y + g(t)$

031108

Dabei

$$f : [a,b] \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

Lipschitz-stetig bzgl. y, denn

$$\|f(t,y^1) - f(t,y^2)\|$$

$$= \|A(t)(y^1 - y^2)\|$$

$$\leq \max_{t\in[a,b]} \max_{1\leq i,j\leq n} |a_{ij}(t)| \, \|y^1 - y^2\|_\infty$$

d.h. f L-stetig bzgl. y.

<u>Beachte</u>: Aussage des Existenz- und Eindeutigkeitssatzes für $y' = f(t,y)$ ist auf n-dimensionale Aufgaben-

stellungen übertragbar.

<u>Zunächst</u> homogenes System:

$$y' = A(t)\, y(t) \qquad t \in [a,b]$$

Feststellung: y^1 Lösung und y^2 Lösung, dann

$$(\alpha y^1 + \beta y^2)' = \alpha y^{1'} + \beta y^{2'}$$

$$= \alpha A(t) y^1 + \beta A(t) y^2$$

$$= A(t)(\alpha y^1 + \beta y^2)$$

D.h. mit Lösungen $y^1, \dots, y^n$ ist jede Linearkombination von $y^1, \dots, y^n$ Lösung.

<u>Merke</u>: $y'(t) = A(t)\, y(t)$ besitzt genau n auf $[a,b]$ linear

031108

unabhängige Lösungen.

Def.: i) n linear unabhängige Lösungen $y^1(t), \dots, y^n(t)$ von

$$y' = A(t)\, y$$

heißen Fundamentalsystem von Lösungen.

Notation: $Y(t) := [y^1(t), \dots, y^n(t)]$

mit $Y(t) \in \mathbb{R}^{n,n}$

ii) $W(t) := \det Y(t)$ heißt Wronski-Determinante des Fundamentalsystems $Y(t)$.

Beachte: $Y(t)$ Fundamentalsystem

gdw $\det Y(t) = W(t) \neq 0 \quad \forall_{t \in [a,b]}$

Andererseits: Seien $w^1, \dots, w^n$ Lösungen von $y' = A(t)\, y(t)$, so liefert der <u>Wronski</u>-<u>Test</u>

$$\det [w^1, \dots, w^n]$$

Auskunft darüber, ob $w^1, \dots, w^n$ FS bilden.

$$\det [w^1, \dots, w^n] \begin{cases} = 0 & \text{kein FS} \\ \neq 0 & \text{FS} \end{cases}$$

Merke: y Lösung von $y' = A(t)\, y$

$$\Rightarrow \quad y(t) = \sum_{i=1}^{n} c_i\, y^i(t)$$

031108

mit geeigneten Koeffizienten $c_1, \dots, c_n$, falls $y^1, \dots, y^n$ FS.

Kurz: $y(t) = Y(t)\, c$

mit $c = [c_1, \dots, c_n]^t$.

Struktur des inhomogenen Systems

$$y' = A(t)\, y + g(t)$$

Lösung hat die Form

$$y(t) = \underbrace{y_p(t)}_{\text{partikuläre Lösung}} + \sum_{i=1}^{n} c_i \underbrace{y^i(t)}_{\text{Element eines FS}}$$

(6)

Dabei $Y(t) = [y^1(t), \dots, y^n(t)]$ Matrix eines FS und

$$y_p(t) = \underbrace{Y(t)}_{\in \mathbb{R}^{n,n}} \underbrace{\int Y(t)^{-1} g(t)\, dt}_{\in \mathbb{R}^n}$$

und $\int \begin{bmatrix} f_1(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{bmatrix} dt := \begin{bmatrix} \int f_1(t)\, dt \\ \vdots \\ \int f_n(t)\, dt \end{bmatrix}$

Nachweis: Variation der Konstanten

Ansatz: $y_p(t) = Y(t)\, c(t)$

Damit

$$y_p'(t) = Y'(t)\, c(t) + Y(t)\, c'(t)$$

$$= A(t) \underbrace{Y(t)\, c(t)}_{y_p(t)} + Y(t)\, c'(t)$$

$$\overset{\text{DGL}}{=} A(t)\, y_p(t) + g(t)$$

$$\Rightarrow \quad Y(t)\, C'(t) \overset{!}{=} g(t)$$

d.h. $$C'(t) = Y(t)^{-1} g(t)$$

$$\Rightarrow \quad C(t) = \int Y(t)^{-1} g(t)\, dt + D$$

$\Rightarrow$ Bh.