VORLESUNG DGL I 8.2.2008

TAUBERT

Partielle Differentialgleichungen. Beispiele

$$F\left(z, u, \frac{\partial u}{\partial z_1}, \frac{\partial u}{\partial z_2}, \dots, \frac{\partial u}{\partial z_n}, \dots, \frac{\partial^p}{\partial_{z_1}^{p_1} \partial_{z_2}^{p_2} \dots \partial_{z_n}^{p_n}}\right) = 0$$

$$z \in G \subset \mathbb{R}^n, \quad G \text{ offen}$$

$$u = (u_1, \dots, u_m) : G \to \mathbb{R}^m$$

$$p_1 + p_2 + \dots + p_n = p \geq 1$$

F mit q Komponenten

$\rightarrow$ System von q partiellen Differentialgleichungen $\leftarrow$ p-ter Ordnung

Wichtige (lineare) partielle Differentialgleichungen sind ($q = 1$)

Transport-gleichung	$u_t + b(x) u_x = 0$	$p = 1$	$z = (t,x) \in \mathbb{R}^2$
Laplace-gleichung	$u_{xx} + u_{yy} = 0$	$p = 2$	$z = (t,x) \in \mathbb{R}^2$
Wärmeleitungs-gleichung	$u_t - u_{xx} = 0$	$p = 2$	$z = (t,x) \in \mathbb{R}^2$
Wellen-gleichung	$u_{tt} - u_{xx} = 0$	$p = 2$	$z = (t,x) \in \mathbb{R}^2$

$$F\left(z, u, \frac{\partial u}{\partial z_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial z_n}, \dots, \frac{\partial^p u}{\partial z_1^{p_1} \dots \partial z_n^{p_n}}\right) = 0 \qquad (*)$$

Ziel:
- Nachweis von Lösungen
- Eindeutigkeit der Lösungen bei gegebenen Nebenbedingung
- Stetige Abhängigkeit der Lösungen von Nebenbedingungen.

Probleme: Definition von Lösungen

- p-mal stetig differenzierbare Funktion $u(\cdot)$ welche $(*)$ für alle $z \in G$ erfüllt
- "schwache Lösungen
- Nebenbedingungen ?

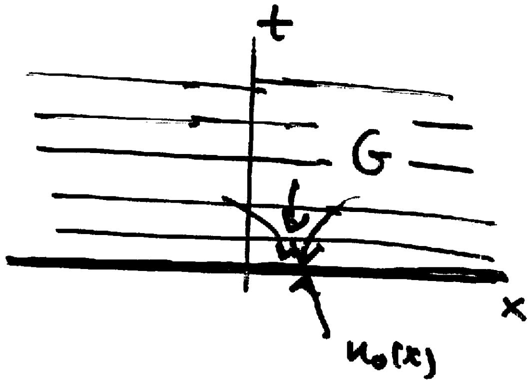
Allgemein:

- Nichtlineare Aufgaben schwieriger als lineare
- Je höher die Ordnung umso schwieriger
- System schwieriger als einzelne
- Je mehr unabhängige Variablen umso schwieriger
- Meistens keine expliziten Lösungsformeln möglich.

Transportgleichung:

$$u_t + c u_x = 0 , \qquad c > 0$$

Nebenbedingung $\quad u(x,0) = u_0(x) \quad$ stetig differenzierbar



$G : t \geq 0 , x \in \mathbb{R}$

Lösung (klassisch)

- $u(x,t)$ stetig differenzierbar auf G
- $\lim_{(x,t) \to (x_0,0)} u(x,t) = u_0(x_0)$

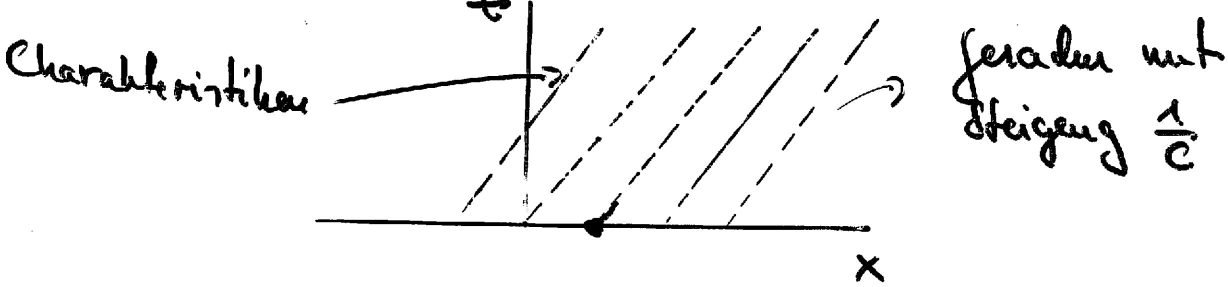
Satz

Die Aufgabe besitzt die eindeutige Lösung

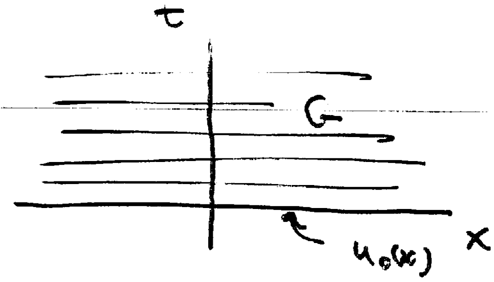
$$u(x,t) = u_0(x - ct)$$

Bemerkung

Entlang der Geraden $x - ct = \alpha$ ist die Lösung konstant.



$$\begin{aligned} u_t + c u_x &= 0 \quad c > 0 \\ u(x,0) &= u_0(x) \end{aligned} \qquad (*)$$



Es sei $u(x,t)$ eine Lösung von $(*)$

Betrachte:

$$\omega(t) := u(x_0 + ct, t)$$

$$\rightsquigarrow \quad \frac{d}{dt}\omega(t) = c\frac{\partial}{\partial x} u(x_0+ct,t) + \frac{\partial}{\partial t} u(x_0+ct,t) \overset{!}{=} 0$$

$$\Rightarrow \omega(t) = \text{konst} \quad \Longrightarrow \quad \omega(t) = \omega(0) = u(x_0,0) = u_0(x_0)$$

Mit $\quad x = x_0 + ct$

$$\underline{u(x,t)} = u(x_0+ct,t) = u(x_0,0) = u_0(x_0) = \underline{u_0(x-ct)}$$

Bemerkung:

Es ist sicherlich sinnvoll

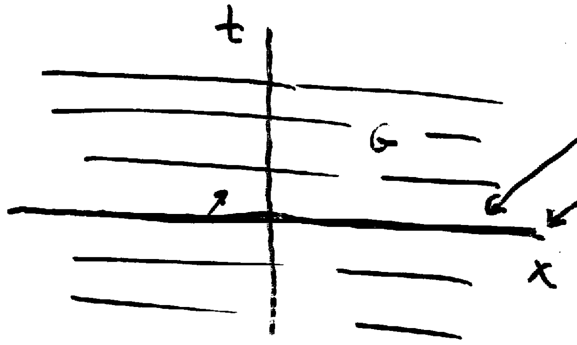
$$u(x,t) = u_0(x-ct)$$

als "Lösung" von $(*)$ zu bezeichnen, auch wenn $u_0(x)$ nicht stetig differenzierbar ist !!!

Wellengleichung

$$u_{tt} = c^2 u_{xx}, \quad c \neq 0 \quad t,x \in \mathbb{R}$$

Nebenbedingung (A.B)



$$u(x,0) = f(x) \quad x \in \mathbb{R}$$
$$u_t(x,0) = g(x) \quad x \in \mathbb{R}$$

Satz

Sei $f \in C^2(\mathbb{R})$ und $g \in C^1(\mathbb{R})$. Dann existiert genau eine 2-mal stetig differenzierbare Lösung von

$$u_{tt} = c^2 u_{xx}$$

mit $u(x,0) = f(x)$ und $u_t(x,0) = g(x)$.

Die Lösung kann dargestellt werden in der Form

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left(f(x-ct) + f(x+ct)\right) + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(y)\,dy$$

$$u_{tt} = c^2 u_{xx}$$
$$\left.\begin{array}{l} u(x,0) = f(x) \\ u_t(x,0) = g(x) \end{array}\right. \Longrightarrow u(x,t) = \frac{1}{2}\left(f(x+ct) + f(x-ct)\right) + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(y)\,dy$$

<u>Bemerkung:</u>

Die formale Faktorisierung

$$(\partial_t + c\partial_x)(\partial_t - c\partial_x) = 0$$

legt auch den Ansatz (Erhaltungsgleichung)

$$u(x,t) = \phi(x-ct) \quad \text{und (oder)} \quad u(x,t) = \psi(x+ct)$$

nahe.

Beweis des Satzes

Ansatz

$$u(x,t) = \omega(x-ct,\ x+ct)$$

Setze

$$\xi = x - ct, \qquad \eta = x + ct$$

$$u_t = -c\omega_\xi + c\omega_\eta \qquad\qquad u_x = \omega_\xi + \omega_\eta$$
$$u_{tt} = c^2\omega_{\xi\xi} - 2c^2\omega_{\xi\eta} + c^2\omega_{\eta\eta} \qquad u_{xx} = \omega_{\xi\xi} + 2\omega_{\xi\eta} + \omega_{\eta\eta}$$

$$\Longrightarrow \quad u_{tt} - c^2 u_{xx} = -4c^2\omega_{\xi\eta}$$

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = -4c^2 w_{\xi\eta} \qquad c \geq 0$$

$u(x,t)$ genau dann löst die Wellengleichung, wenn

$$w_{\xi\eta} = 0$$

$$\rightarrow \qquad w_\xi(\xi,\eta) = h(\xi)$$

$$w(\xi,\eta) = \int h(\xi)\,d\xi + G(\eta) = H(\xi) + G(\eta)$$

$$\Rightarrow \quad u(x,t) = w(x-ct, x+ct) = H(x-ct) + G(x+ct)$$

Anpassung an die Randbedingungen $(t=0)$

$$\left.\begin{array}{l} H(x) + G(x) = f(x) \\ -H'(x) + G'(x) = \frac{1}{c} g(x) \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} H'(x) = \frac{1}{2}\left(f'(x) - \frac{1}{c} g(x)\right) \\ G'(x) = \frac{1}{2}\left(f'(x) + \frac{1}{c} g(x)\right) \end{array}\right.$$

oder

$$H(x) = \frac{1}{2} f(x) - \frac{1}{2c}\int_0^x g(y)\,dy + C_1$$

$$G(x) = \frac{1}{2} f(x) + \frac{1}{2c}\int_0^x g(y)\,dy + C_2$$

Die Gleichung

$$f(x) = u(x,0) = w(x,x) = H(x) + G(x)$$

liefert

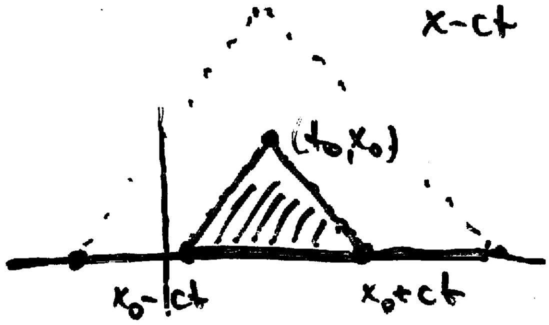
$$C_1 + C_2 = 0$$

$$\Rightarrow$$

$$u(x,t) = w(x-ct, x+ct) = \frac{1}{2}\left(f(x-ct) + f(x+ct)\right) + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(y)\,dy$$

Bemerkung:

Abhängigkeitsbereich



Bemerkung

$$u_{tt} = c^2 u_{xx} \qquad u(x,0) = f(x) \qquad u_t(x,0) = g(x)$$

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\big(f(x-ct) + f(x+ct)\big) + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(y)\,dy$$

Vernünftig: $u(x,t)$ auch "Lösung" der Wellengleichung wenn f nicht stetig und g lokal integrierbar.

Wärmeleitungsgleichung

$$u_t = k u_{xx}, \qquad k > 0$$

Einige Lösungen:

$$u(x,t) = kt + \left(\tfrac{1}{2}\right)x^2 + C$$
$$u(x,t) = e^{-(\gamma^2 kt)}(\sin \gamma x + \cos \gamma x)$$
$$u(x,t) = e^{kt \pm x}$$

Eine "Lösung" für $t > 0$, $x \in \mathbb{R}$ mit

$u(x,0) = g(x)$ ist

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi kt}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-y)^2}{4kt}}\, g(y)\,dy$$

→ Beachte: Faltung

Die Laplace-Gleichung

$$u_{xx} + u_{yy} = 0$$

Einige Lösungen

Betrachte

- $p(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2$ $\qquad a_i \in \mathbb{R} \qquad z \in \mathbb{C}$
- $p(z) = e^{x+iy}$ $\qquad z = x+iy$

Sowohl der Realteil, als auch der Imaginärteil dieser Funktionen sind Lösungen der Laplace-Gleichung, z.B.

$$p(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 = a_0 + a_1(x+iy) + a_2(x+iy)^2$$

$$\rightsquigarrow u(x,y) = a_0 + a_1 x + a_2(x^2 - y^2) \qquad u(x,y) = a_1 y + 2a_2 xy$$

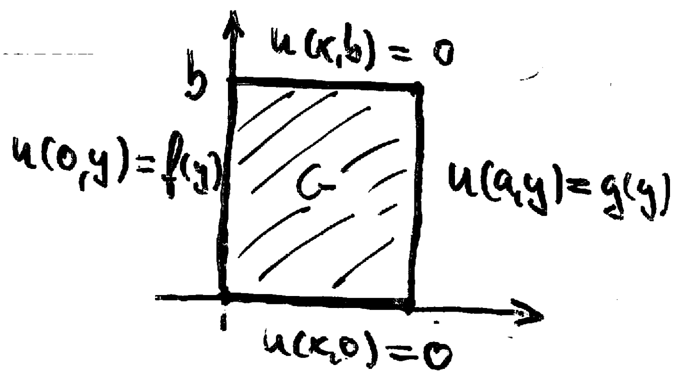
$\nearrow$

Funktionentheorie

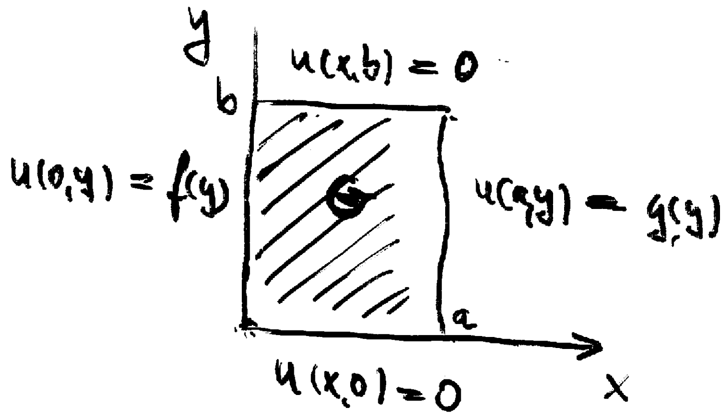
Betrachte ggf.

$$u_{xx} + u_{yy} = 0$$

$$G = \{(x,y) \,/\, 0 < x < a, \; 0 < y < b\}$$



$$u(0,y) = f(y)$$
$$u(a,y) = g(y)$$
$$u(x,0) = 0$$
$$u(x,b) = 0$$



$$u_{xx} + u_{yy} = 0$$

Ansatz $\qquad u = v(x)\,w(y)$

$$u_{xx} + u_{yy} = v_{xx}(x)\,w(y) + v(x)\,w_{yy}(y) \overset{!}{=} 0$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{v_{xx}(x)}{v(x)} = -\frac{w_{yy}(y)}{w(y)} = \mu = \text{konst.}$$

$\Longrightarrow$ 1. $\quad w'' + \mu w = 0 \qquad w(0) = w(b) = 0$

RANDWERTAUFGABE

2. $\quad v'' - \mu v = 0$

DGL

$$w(y) = \sin(\sqrt{\mu_n}\, y) \qquad \mu_n = \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 \quad n = 1, 2, \ldots$$

$$v(x) = A \sinh(\sqrt{\mu_n}\,(a-x)) + B \sinh(\sqrt{\mu_n}\, x)$$

Damit ist auch jede Linearkombination

$$v(x,y) = \sum_n \left(A_n \sinh(\sqrt{\mu_n}(a-x)) + B_n \sinh(\sqrt{\mu_n}x)\right) \sin\frac{n\pi}{b}y$$

eine Lösung von

$$u_{xx} + u_{yy} = 0$$

Bestimme nun die A_n, B_n so, dass

$$f(y) = v(0,y) = \sum_n A_n \sinh(a\sqrt{\mu_n}) \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right)$$

$$g(y) = v(a,y) = \sum_n B_n \sinh(a\sqrt{\mu_n}) \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right)$$

Multiplikation mit $\sin\frac{\nu\pi}{b}y$ und Integration über $[0,b]$ liefert

Fourierdarstellung

$$A_n = \frac{2}{b\sinh(a\sqrt{\mu_n})} \int_0^b f(y)\sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right)dy$$

$$B_n = \frac{2}{b\sinh(a\sqrt{\mu_n})} \int_0^b g(y)\sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right)dy$$

Bemerkung: "Lösungen" sind dann die Reihen !!!

Klassifikation partieller Differentialgleichungen

$$Lu := au_{xx} + 2bu_{xy} + cu_{yy} + du_x + eu_y + fu \qquad (*)$$

$$\text{Rang}\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \geq 1 \qquad \text{Koeffizienten aus } \mathbb{R}$$

Durch Transformation

$$\xi = \alpha x + \beta y$$
$$\eta = \gamma x + \delta y \qquad \det\begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{pmatrix} \neq 0$$

kann (*) überführt werden in

$ac - b^2 > 0 \longrightarrow u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta}$ + Terme nied. Ordng (elliptisch)

$ac - b^2 = 0 \longrightarrow u_{\xi\xi}$ + " (parabolisch)

$ac - b^2 < 0 \longrightarrow u_{\xi\xi} - u_{\eta\eta}$ + " (hyperbolisch)

Ähnliches Ergebnis bekannt (Schule ?) für Polynome

$$q(x,y) = ax^2 + 2bxy + cy^2 + dx + ey + fu$$

$\longrightarrow$

$q(\xi,\eta) = \xi^2 + \eta^2 + \dots \qquad ac - b^2 > 0$

$q(\xi,\eta) = \xi^2 + \dots \qquad ac - b^2 = 0$

$q(\xi,\eta) = \xi^2 - \eta^2 \qquad ac - b^2 < 0$

Beweis in mehreren Stufen

Es sei

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$$

A symmetrisch $\Longrightarrow$ A diagonalisierbar

reelle Eigenvektoren v_1, v_2; reelle Eigenwerte λ_1, λ_2

$$(v_1, v_2)\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = A(v_1, v_2)$$

Setze

$$B := (v_1, v_2) = \begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{pmatrix}, \quad \det(B) \neq 0$$

Eigenvektoren orthogonal zueinander $\Longrightarrow$

$$B^T B = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha^2+\beta^2 & 0 \\ 0 & \gamma^2+\delta^2 \end{pmatrix}$$

$\Longrightarrow$

$$B^T B\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = B^T A B = \begin{pmatrix} \lambda_1(\alpha^2+\beta^2) & 0 \\ 0 & \lambda_2(\alpha^2+\beta^2) \end{pmatrix}$$

$$Lu = a u_{xx} + 2b u_{xy} + c u_{yy} + \cdots$$

$$u(x,y) = v(\alpha x + \beta y, \gamma x + \delta y)$$

$$\xi = \alpha x + \beta y$$
$$\eta = \gamma x + \delta y$$

$$u_x(x,y) = \alpha v_\xi(\alpha x + \beta y, \gamma x + \delta y) + \gamma v_\eta(\alpha x + \beta y, \gamma x + \delta y)$$

$$u_{xx}(x,y) = \alpha^2 v_{\xi\xi} + 2\gamma\alpha v_{\xi\eta} + \gamma^2 v_{\eta\eta}$$

$$u_{yy}(x,y) = \beta^2 v_{\xi\xi} + 2\beta\delta v_{\xi\eta} + \delta^2 v_{\eta\eta}$$

$$u_{xy}(x,y) = \alpha\beta v_{\xi\xi} + (\alpha\delta + \gamma\beta) v_{\xi\eta} + \gamma\delta v_{\eta\eta}$$

Multiplikation mit a, c bzw $2b$ und Addition liefert

$$a u_{xx} + 2b u_{xy} + c u_{yy} + \cdots$$

$$= \bar{a} u_{\xi\xi} + 2\bar{b} u_{\xi\eta} \; \bar{c} u_{\eta\eta} + \cdots$$

$$\bar{a} = a\alpha^2 + 2b\alpha\beta + c\beta^2 \qquad \bar{c} = a\gamma^2 + 2b\gamma\delta + c\delta^2$$

$$\bar{b} = a\alpha\gamma + b(\alpha\delta + \beta\Gamma) + c\beta\delta$$

Übrigens:

$$\begin{pmatrix} \bar{a} & \bar{b} \\ \bar{b} & \bar{c} \end{pmatrix} = B^T \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} B = \begin{pmatrix} \lambda_1(\alpha^2 + \beta^2) & 0 \\ 0 & \lambda_2(\gamma^2 + \delta^2) \end{pmatrix}$$

Wir hatten

$$a u_{xx} + 2b u_{xy} + c u_{yy} + \cdots\cdots$$

$$\rightsquigarrow \quad \bar{a} u_{\xi\xi} + \cancel{2\bar{b} u_{\xi\eta}} + \bar{c} u_{\eta\eta} + \cdots\cdot$$

$$\begin{pmatrix} \bar{a} & \bar{b} \\ \bar{b} & \bar{c} \end{pmatrix} = B^T A B = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1(\alpha^2+\beta^2) & 0 \\ 0 & \lambda_2(\gamma^2+\delta^2) \end{pmatrix}$$

Eigenvektor zu A   zugehörige Eigenwert.

$$\lambda_1 = \frac{a+c+\sqrt{(a+c)^2-4(ac-b^2)}}{2} \leftarrow$$

$$\lambda_2 = \frac{a+c-\sqrt{(a+c)^2-4(ac-b^2)}}{2}$$

$$ac-b^2 > 0 \iff \lambda_1, \lambda_2 > 0 \iff \bar{a}, \bar{c} > 0$$
$$ac-b^2 = 0 \iff \lambda_1 > 0, \lambda_2 = 0 \iff \bar{a} > 0, \ \bar{c} = 0$$
$$ac-b^2 < 0 \iff \lambda_1 > 0 > \lambda_2 \iff \bar{a} > 0, \ \bar{c} < 0$$

Eine weitere Skalierung führt zu $\bar{a} = 1$ und $\bar{c} = 1$.

Wünsche Ihnen

alles Gute für die Zukunft

insbesondere und aktuell

Erfolg bei Ihren Klausuren

8.2.2008