Vorlesung DGL I 25.1.08

TAUBERT

Numerische Verfahren für Anfangswertaufgaben

Lösungsmethoden für $(a \le t \le b)$

$$y'(t) = f(t, y(t))$$

$$y(a) = y_0$$

- Aufgabe explizit lösen
- Aufgabe numerisch lösen

Wie kommt man zu einem numerischen Verfahren?

z.B. $y(\cdot)$ Lösung $\Rightarrow$

$$\cancel{\lim_{h \to 0}} \frac{y(t+h) - y(t)}{h} = f(t, y(t))$$

$$\frac{y(t+h) - y(t)}{h} \cong f(t, y(t))$$

$$y(t+h) \cong \underline{y(t)} + h f(t, \underline{y(t)})$$

Verfahren $\quad Y_{j+1} = Y_j + h f(t_j, Y_j)$

$$y'(t) = f(t,y(t)) \quad \rightsquigarrow \quad y(t+h) \cong y(t) + h f(t,y(t))$$

$$Y_{j+1} = Y_j + h\, f(t_j, Y_j)$$

Etwas allgemeiner:

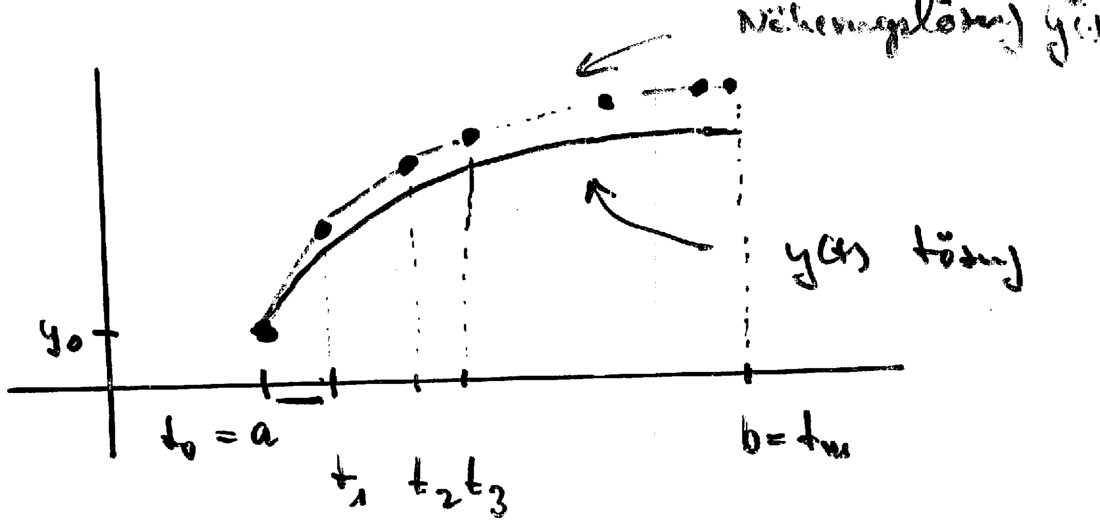
- Zerlege das Intervall $[a,b]$ in m Teile

$$Z_m : \quad a = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_m = b$$

$$h_j = t_j - t_{j+1} \quad : \text{Schrittweite}$$

- Ermittle Näherungslösung $Y_{j+1} \cong y(t_{j+1})$ durch

$$Y_{j+1} = Y_j + h_j\, f(t_j, Y_j)$$
$$Y_0 = y_0$$

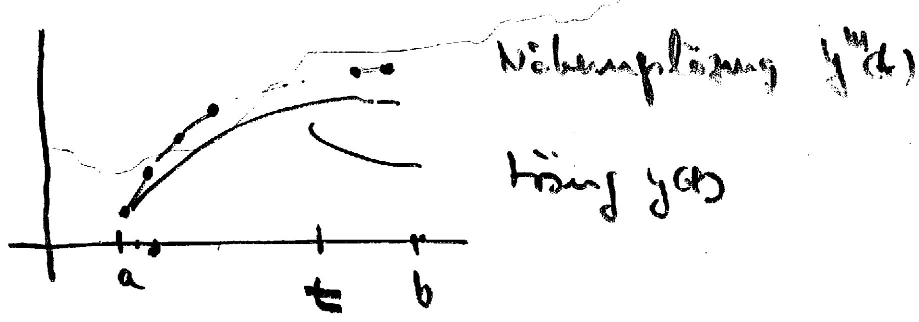


→ Verfahren bekannt!!! ⟷ POLYGONZUGVERFAHREN (Existenzsatz von Peano)

Jedes m liefert "Näherungsfunktion" $y^m(\cdot)$ auf $[a,b]$

Hoffnung: Näherungslösungen sind "gute" Approximationen für die Lösung der Anfangswertaufgabe

$$\dot{y}(t) = f(t, y(t))$$
$$y(a) = y_0 \quad \rightsquigarrow \quad Y_{j+1} = Y_j + h_j f(t_j, Y_j)$$



Näherungslösung $y^m(t)$ gut? $\quad \underset{\max|h_j| \to 0}{m \to \infty} \quad$ Konvergenz?

Beispiel

$$y' = ky \qquad y(0) = y_0$$

Explizite Euler Verfahren bzw. Polygonzugverfahren.
Feste Schrittweite h

$$Y_{j+1} = Y_j + hkY_j \qquad Y_0 = y_0$$
$$Y_j := \text{Näherung für } y(jh)$$

$$Y_{j+1} = Y_j + hkY_j = (1+hk)Y_j = (1+hk)^{j+1} y_0$$

$$j+1 \to \infty$$
$$h \to 0$$
$$h(j+1) = t$$

$$\lim_{j\to\infty} Y_{j+1} = \lim_{j\to\infty} \left(1+\frac{k\,t}{j+1}\right)^{j+1} y_0 = e^{kt} y_0 \quad !!!$$

$$\rightsquigarrow \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = e^x$$

$y' = f(t,y)$, $y(0) = y_0$, $\quad Y_{j+1} = Y_j + h f(t_j, Y_j)$

$|f(t,u) - f(t,v)| \le K|u-v| \quad t_j = jh \quad h$ fest

$$?? \quad F_j = y(t_j) - Y_j \quad ??$$

- $y(t_{j+1}) - y(t_j) - h f(t_j, y(t_j)) \qquad y \in C^2[0,T]$

$$= \cancel{y(t_j)} + \cancel{y'(t_j)h} + \frac{1}{2} y''(\xi) h^2 - \cancel{y(t_j)} - \cancel{h\, y'(t_j)}$$
$$= \frac{1}{2} y''(\xi) h^2$$

- $Y_{j+1} - Y_j - h f(t_j, Y_j) = 0$

$$F_j = y(t_j) - Y_j$$

$$F_{j+1} = F_j + h\left(f(t_j, \underline{y(t_j)}) - f(t_j, \underline{Y_j})\right) + \frac{1}{2} y''(\xi) h^2$$

Annahme $\frac{1}{2}|y''(t)| \le M$ f. alle t

$$|F_{j+1}| \le |F_j| + hK|F_j| + Mh^2 = (1+hK)|F_j| + Mh^2$$
$$\le (1+hK)^{j+1}|F_0| + \sum_{\nu=0}^{j} (1+hK)^\nu (Mh^2)$$

$$\le (1+hK)^{j+1}|F_0| + \frac{(1+hK)^{j+1} - 1}{\cancel{(1+hK)-1}} Mh^{\cancel{2}}$$

$$|F_{j+1}| \leq (1+hK)^{j+1}|F_0| + \frac{(1+hK)^{j+1}-1}{(1+hK)-1} M h^2$$

$$= (1+hK)^{j+1}|F_0| + \frac{M}{K}\left((1+hK)^{j+1}-1\right)h$$

$(j+1)h \to t$

$j \to \infty$

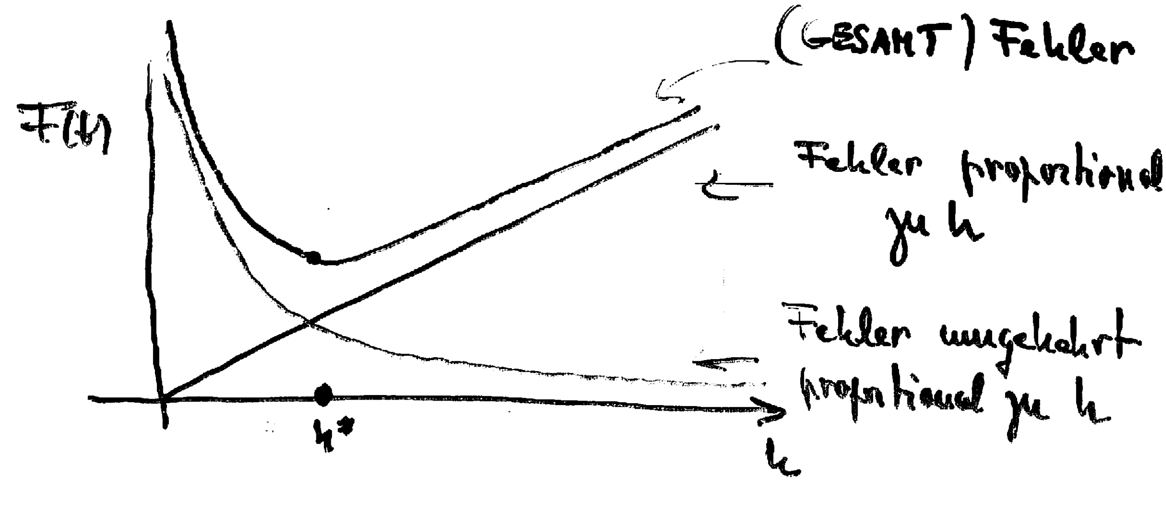
$$\underline{|F(t)|} \leq e^{Kt}\underline{|F_0|} + \frac{M}{K}(e^{Kt}-1)\underline{h}$$

!!! Beim Euler-Verfahren ist der Fehler proportional zur Schrittweite h !!!

Was passiert bei $Y_{j+1} = Y_j + h f(t_j, Y_j) + \varepsilon$?

$$|F(t)| \leq e^{Kt}|F_0| + \frac{M}{K}(e^{Kt}-1)h + \frac{|\varepsilon|}{h}(e^{Kt}-1)$$

!!! Rundungsfehler können sich umgekehrt proportional zur Schrittweite h verstärken



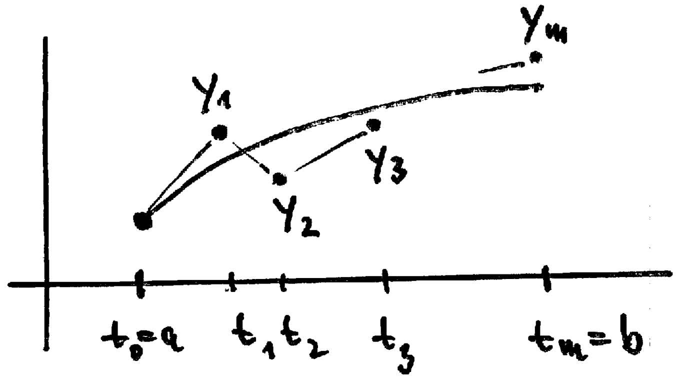
Andere numerische Verfahren?

- Einschrittverfahren
- Mehrschrittverfahren
- Extrapolationsverfahren

Zerlegung $\quad a = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_m = b$

Näherung bei $t = t_j \quad Y_j \approx y(t_j)$

Schrittweite $\quad h_j = t_{j+1} - t_j$



Einschrittverfahren: Berechne aus (t_j, Y_j) den Wert (t_{j+1}, Y_{j+1})

$$Y_{j+1} = Y_j + h_j \Phi(t_j, Y_j, h_j)$$

Mehrschrittverfahren: Verwende mehrere (t_i, Y_i) $i \leq j$ um (t_j, Y_{j+1}) zu berechnen

z.B. $\quad \alpha_2 Y_{j+2} + \alpha_1 Y_{j+1} + \alpha_0 Y_j = h(\beta_2 f(t_{j+2}, Y_{j+2}) + \beta_1 f(t_{j+1}, Y_{j+1}) + \beta_0 f(t_j, Y_j))$

$\beta_2 = 0$ explizit $\quad \beta_2 \neq 0$ implizit

Extrapolationsverfahren: Berechnet Näherungen zu verschiedenen Schrittweiten und daraus $(h \to 0)$ "bessere" Näherungen.

- Einschrittverfahren

$$y_{j+1} = y_j + h_j \Phi(t_j, y_j, h_j)$$

- Euler

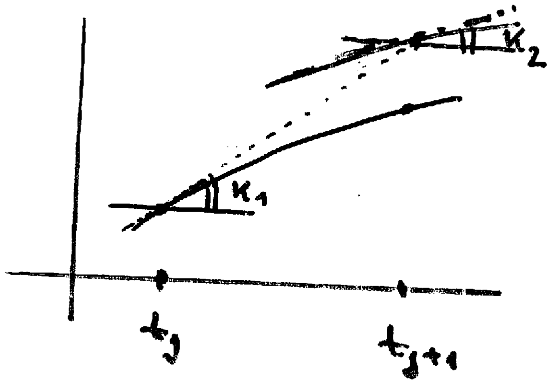
$$\underline{y}_{j+1} = \underline{y}_j + h_j \underline{f(t_j, y_j)}$$

- Heun

$$y_{j+1} = y_j + h_j\left(\frac{1}{2}k_1 + \frac{1}{2}k_2\right)$$

$$k_1 = f(t_j, y_j)$$

$$k_2 = f(t_j + h_j, \underline{y_j + h_j k_1})$$

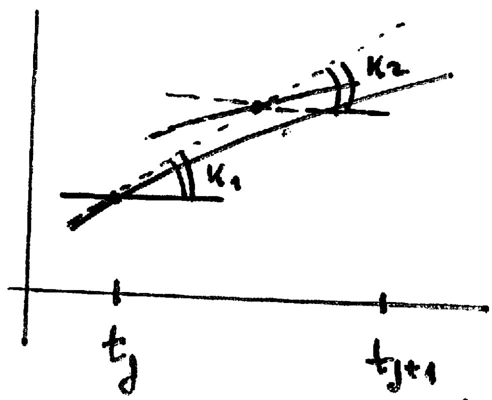


- Modifiziertes Euler

$$y_{j+1} = y_j + h_j k_2$$

$$k_1 = f(t_j, y_j)$$

$$k_2 = f\left(t_j + \frac{h_j}{2}, y_j + \frac{h_j}{2}k_1\right)$$



Unterschiede ?

- Euler : Eine Funktionsauswertung / Schritt
- Heun + ... : zwei " en / Schritt

Verfahren haben verschiedene Ordnung

Euler-Verfahren hat Ordnung 1
Heun + ... -Verfahren hat Ordnung 2

$$y_{j+1} = y_j + h\,\Phi(t_j, y_j, h)$$

Definitionen:

$z(t)$ sei die Lösung der Anfangswertaufgabe

$$z'(t) = f(t, z(t)), \quad z(t_j) = y_j.$$

a) $$\Delta(t_j, y_j, h) = \frac{z(t_j+h) - y_j}{h}$$

heißt exaktes Inkrement

b) $$\tau(t_j, y_j, h) = \Delta(t_j, y_j, h) - \Phi(t_j, y_j, h)$$

heißt lokaler Diskretisierungsfehler

c) Das Einschrittverfahren heißt konsistent, falls für alle hinreichend oft differenzierbaren Funktionen $f(t,y)$ gilt

$$\lim_{h\to 0} \tau(t_j, y_j, h) = 0$$

Das Einschrittverfahren hat die Ordnung p, falls gilt

$$\tau(t_j, y_j, h) = O(h^p)$$

d.h. $\exists\, C, h_0 > 0 : \forall h \in (0, h_0] \quad |\tau(t_j, y_j, h)| \le C h^p$

Diskretisierungsfehler, Konsistenz und Ordnung für Euler-, Heun- und modifizierten Euler-Verfahren

Vorbereitungen: $z'(t) = f(t, z(t))$, $t = t_j$, $Y = z(t) = z(t_j)$

$$z(t) = Y$$
$$z'(t) = f(t, z(t)) = f(t, Y) =: f$$
$$z''(t) = f_t(t, z(t)) + f_z(t, z(t))\, z'(t) =: f_t + f_z f$$
$$z(t+h) = z(t) + z'(t)h + z''(t)\frac{h^2}{2!} + O(h^3) \quad \text{Taylor}$$

Exakter Inkrement

$$\Delta(t, Y, h) = \frac{z(t+h) - Y}{h} = \frac{z(t) + z'(t)h + z''(t)\frac{h^2}{2!} + O(h^3) - Y}{h} =$$
$$= \frac{Y + fh + (f_t + f_z f)\frac{h^2}{2} + O(h^3) - Y}{h}$$
$$= f + \frac{h}{2}(f_t + f_z f) + O(h^2)$$

Diskretisierungsfehler $\quad \tau(t, Y, h) = \underline{\underline{\Delta(t, Y, h)}} - \underline{\phi(t, Y, h)}$

- **Euler**: $\quad \phi(t, Y, h) = f(t, Y) = f$

$$\tau(t, Y, h) = \cancel{f} + \frac{h}{2}(f_t + f_z f) + O(h^2) - \cancel{f}$$
$$= \frac{h}{2}(f_t + f_z f) + O(h^2)$$

$\tau \xrightarrow{h \to 0} 0$ $\quad\quad$ $\tau = O(h)$

konsistent $\quad\quad$ Ordnung 1

- Heun

$$\phi(t,y,h) = \frac{1}{2}k_1 + \frac{1}{2}k_2$$

$$= \frac{1}{2}f(t,y) + \frac{1}{2}f(t+h, y+hf(t,y)) =$$

$$= \frac{1}{2}f(t,y) + \frac{1}{2}\left(f(t,y) + f_t(t,y)h + f_z(t,y)f(t,y)h + O(h^2\right)$$

$$= f + \frac{1}{2}h(f_t + f_z f) + O(h^2)$$

$$\tau(t,y,h) = \Delta(t,y,h) - \phi(t,y,h)$$

$$= f + \frac{h}{2}(f_t + f_z f) - f - \frac{1}{2}h(f_t + f_z f) + O(h^2)$$

$$= O(h^2)$$

$\tau \xrightarrow{h \to 0} 0$ $\qquad\qquad$ $\tau = O(h^2)$

konsistent $\qquad\qquad$ Ordnung 2

- Modifizierter Euler Verfahren

konsistent der Ordnung 2

Darstellung von Einschrittverfahren
(Butcher Schemas)
Arrays

Euler $\quad Y_{j+1} = Y_j + h_j K_1(t_j, Y_j, h_j)$

$$K_1(t, Y, h) = f(t, Y)$$

Heun $\quad Y_{j+1} = Y_j + h_j\left(\frac{1}{2}K_1 + \frac{1}{2}K_2\right)$

$$K_2(t, Y, h) = f(t+h, Y + hK_1)$$

allgemeiner : s-Stufe

Runge-Kutta $\quad Y_{j+1} = Y_j + h_j \sum_{i=1}^{s} c_i \underline{K}_i$

$$K_i(t, Y, h) = f\left(t + \underline{a}_i h,\ Y + h \sum_{l=1}^{i-1} b_{il} K_l\right)$$

$$\begin{array}{c|ccccc} 0 & & & & & \\ a_2 & \underline{b_{21}} & & & & \\ a_3 & \underline{b_{31}} & \underline{b_{32}} & & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & \\ a_s & \underline{b_{s1}} & \underline{b_{s2}} & \cdots & \underline{b_{ss-1}} & \\ \hline & \underline{c_1} & \underline{c_2} & \cdots & \underline{c_{s-1}} & \underline{c_s} \end{array}$$

Euler $(p=1)$

$$\begin{array}{c|c} 0 & \\ \hline & 1 \end{array}$$

Heun $(p=2)$

$$\begin{array}{c|cc} 0 & & \\ 1 & 1 & \\ \hline & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}$$

modifizierter Euler $(p=2)$

$$\begin{array}{c|cc} 0 & & \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \\ \hline & 0 & 1 \end{array}$$

Klassische Runge-Kutta-Verfahren $(p=4)$

$$\begin{array}{c|cccc} 0 & & & & \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & & & \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & & \\ 1 & 0 & 0 & 1 & \\ \hline & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \end{array}$$

$$Y_{j+1} = Y_j + h\left(\frac{1}{6}K_1 + \frac{1}{3}K_2 + \frac{1}{3}K_3 + \frac{1}{6}K_4\right)$$

$$K_1 = f(t, Y_j)$$

$$K_2 = f(t + \tfrac{1}{2}h, Y_j + \tfrac{1}{2}hK_1)$$

$$K_3 = f(t + \tfrac{1}{2}h, Y_j + \tfrac{1}{2}hK_2)$$

$$K_4 = f(t + h, Y_j + hK_3)$$

Fehler $y(t_j) - Y_j$?

$$|\Phi(t,u,h) - \Phi(t,v,h)| \leq L|u-v|$$

Wie beim Euler

$$|F_j| \leq \alpha_1 |F_0| + \underline{\alpha_2 h}^p$$

Sofern Φ von der Ordnung p und f p-mal stetig differenzierbar !!!

Mehrschrittverfahren – lineare k-Schrittverfahren

$$\alpha_k y_{n+k} + \alpha_{k-1} y_{n+k-1} + \dots + \alpha_0 y_n = h(\beta_k f_{n+k} + \dots + \beta_0 f_n) \quad n \in \mathbb{N}$$

$$\alpha_i, \beta_i \in \mathbb{R}, \quad f_j = f(t_j, y_j), \quad t_j = t_0 + jh, \quad k \geq 1, \quad \alpha_k \neq 0$$

Definition (Stabilität)

Ein lineares k-Schrittverfahren heißt schwach stabil, wenn die Wurzeln der charakteristischen Gleichung

$$p(z) = \alpha_k z^k + \alpha_{k-1} z^{k-1} + \dots + \alpha_0 = 0$$

dem Betrage nach kleiner oder gleich 1 sind und die Wurzeln mit Betrag 1 einfach.

Ein lineares k-Schrittverfahren heißt stark stabil, wenn es schwach stabil ist und 1 die einzige Wurzel mit Betrag 1 ist.

Definition (Konsistenz)

Ein lineares k-Schrittverfahren heißt konsistent, wenn

$$\alpha_k + \alpha_{k-1} + \dots + \alpha_0 = 0$$
$$k\alpha_k + (k-1)\alpha_{k-1} + \dots + \alpha_1 = \beta_k + \dots + \beta_0$$

Beachte:

Konsistenz $\Rightarrow$ 1 Wurzel von $p(z)$

Definition (Ordnung)

Ein lineares k-Schrittverfahren hat die Ordnung p, wenn

$$\tau = \frac{1}{h}\left(\alpha_k y(t+kh) + \dots + \alpha_0 y(t) - h\left(\beta_k y'(t+kh) + \dots + \beta_0 y'(t)\right)\right) = O(h^p)$$

für alle hinreichend differenzierbare y

Beachte:

k-Schrittverfahren konsistent $\Longrightarrow$

k-Schrittverfahren mindestens Ordnung 1.

Satz

Gegeben sei eine AWAbe

$$y' = f(t,y) \quad , \quad y(t_0) = y_0$$

mit einer p-mal stetig differenzierbaren Funktion f. $(p \geq 1)$

Das lineare k-Schrittverfahren

$$\alpha_k y_{n+k} + \cdots + \alpha_0 y_n = h(\beta_k f_{n+k} + \cdots + \beta_0 f_n)$$

sei schwach stabil und von der Ordnung p.

Dann gilt

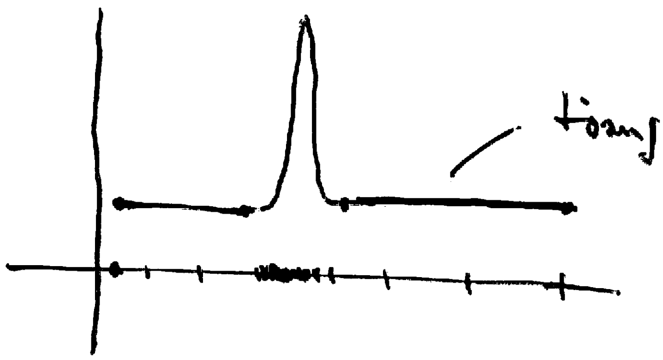
$$|y(t) - y_n| \leq C h^p$$

für alle $t \in [t_0, t_0+T]$ und alle n mit $t_0 + nh = t$, sofern

$$|y(t_i) - y_i| \leq \tilde{C} h^p \qquad i = 0,1,2,\dots,k-1.$$

Schrittweitensteuerung

Schrittweite h_j soll den Gegebenheiten der Lösung angepaßt werden:



Betrachte zwei Einschrittverfahren

$\longrightarrow$ $Y_{j+1} = Y_j + h\,\Phi(t_j, Y_j, h)$ Ordnung p

$\longrightarrow$ $\overline{Y}_{j+1} = Y_j + h\,\overline{\Phi}(t_j, Y_j, h)$ Ordnung $p+1$

Man sei mit der Näherung Y_j an der Stelle t_j zufrieden und man möchte gerne

$$|Y_{j+1} - \underline{y(t_{j+1})}| \le \underline{(TOL)}\, h$$

TOL vorgegeben

Ersetze die Forderung durch

$$|Y_{j+1} - \underline{\overline{Y}_{j+1}}| \le (TOL)\, h \quad !!!$$

Für eine Schrittweite $\underline{h_{alt}}$ berechne man ausgehend von Y_j

$$Y_{j+1}$$
$$\overline{Y}_{j+1}$$

und dann

$$\frac{Y_{j+1} - \overline{Y}_{j+1}}{h_{alt}}$$

Ist $\frac{|Y_{j+1} - \overline{Y}_{j+1}|}{h_{alt}} \leq TOL$, dann ist man erstmal mit Y_{j+1} zufrieden.

Ist $\frac{|Y_{j+1} - \overline{Y}_{j+1}|}{h_{alt}} > TOL$, dann ist man mit Y_{j+1} nicht zufrieden, d.h. die Schrittweite h_{alt} muß verringert werden und mit der neuen Schrittweite h_{neu} erneut gerechnet werden!

Wie kann man die neue Schrittweite finden ??

Es ist

$$\frac{|Y_{j+1} - \overline{Y}_{j+1}|}{h_{alt}} = C h_{alt}^p$$

oder

$$C = \frac{|Y_{j+1} - \overline{Y}_{j+1}|}{h_{alt}} \cdot \frac{1}{(h_{alt})^p}$$

- Die neue Schrittweite h_{neu} sollte so sein, dass

$$TOL = C h_{neu}^p$$

oder $$\underline{h_{neu}} = \sqrt[p]{\frac{TOL}{C}} = h_{alt} \sqrt[p]{\frac{TOL}{\frac{|Y_{j+1} - \overline{Y}_{j+1}|}{h_{alt}}}}$$

- Entsprechend kann man, falls man mit Y_{j+1} zufrieden ist, im nächsten Schritt die Schrittweite vergrößern und zwar zu

$$h_{neu} = \sqrt[p]{\frac{TOL}{C}}$$

Praktisch:

Schrittweite h_{alt} wird nicht akzeptiert, dann $h_{neu} = \frac{1}{2} h_{alt}$

Schrittweite h_{alt} wird akzeptiert, dann $h_{neu} = 1{,}5\, h_{alt}$

Genaueres siehe

Ascher / Olbale

Welche Paare von Verfahren verwendet man bei der Integration mit Einschrittverfahren und Schrittweitensteuerung?

Eingebettete Runge-Kutta-Verfahren

$$Y_{j+1} = Y_j + h_j \sum_{i=1}^{s} c_i k_i$$

$$\overline{Y}_{j+1} = Y_j + h_j \sum_{i=1}^{\bar{s}} \bar{c}_i k_i$$

$$k_i = f(t_j + a_i h_j,\ Y_j + h_j \sum b_{i\ell} k_\ell)$$

Tableau

$$\begin{array}{r|lllll}
 & 0 & & & & \\
 & a_2 & b_{21} & & & \\
 & \vdots & & & & \\
 & a_s & b_{s1} & b_{s2} & \quad & b_{s,s-1} \\
 & a_{\bar{s}} & b_{\bar{s}1} & b_{\bar{s}2} & & b_{\bar{s},\bar{s}-1} \\
\hline
\text{Ordnung } p & & c_1 & c_2 & \cdots & c_s \\
\text{Ordnung } p+1 & & \bar{c}_1 & \bar{c}_2 & \cdots & \bar{c}_s \quad \bar{c}_{\bar{s}}
\end{array}$$

RKF2(3)

$$\begin{array}{r|lll}
 0 & & & \\
 1 & 1 & & \\
 1/2 & 1/4 & 1/4 & \\
\hline
p=2 & 1/2 & 1/2 & \\
p=3 & 1/6 & 1/6 & 2/3
\end{array}$$

RKF4(5)

$$\begin{array}{r|llllll}
 0 & & & & & & \\
 1/2 & 1/2 & & & & & \\
 1/2 & 1/4 & 1/4 & & & & \\
 1 & 0 & -1 & 2 & & & \\
 2/3 & 7/27 & 10/27 & 0 & 1/27 & & \\
 1/5 & 28/625 & -1/5 & 546/625 & 54/625 & -378/625 & \\
\hline
 & 1/6 & 0 & 2/3 & 1/6 & 0 & \\
 & 14/336 & 0 & 0 & 35/336 & 162/336 & 125/336
\end{array}$$