VORLESUNG DGL I 18.1.08

TAUBERT

Erinnerung (Variationsrechnung)

Gesucht hinreichend oft differenzierbare Funktion

$$y : [a,b] \to \mathbb{R}$$
$$y(a) = y_a \qquad y(b) = y_b$$

die ein Funktional der Form

$$I[y] = \int_a^b f(t, y, y')\,dt$$

minimiert.

<u>Satz</u> (Euler-Lagrange-Gleichung)
Jede Lösung der Variationsaufgabe ist Lösung der RWA

$$\frac{\partial}{\partial y} f(t, y_0, y_0') - \frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial y'} f(t, y_0, y_0') = 0$$

$$y_0(a) = y_a \qquad y_0(b) = y_b$$

<u>Beachte</u>
Das Funktional $I[y]$ erfordert <u>$y \in C^1[a,b]$</u>.
Die Euler-Lagrange Gleichung erfordert vielleicht
<u>$y \in C^2[a,b]$</u>! Ein nicht einfaches Problem!

Bisher $\qquad I[y] = \int_a^b f(t, y(t), y'(t))\,dt$

- Minimum aus $C^1[a,b]$ mit $y(a) = y_a$, $y(b) = y_b$.

$$\longrightarrow \begin{cases} \text{Euler-Lagrange-Gleichung} \\ y(a) = y_a, \quad y(b) = y_b \end{cases}$$

$\Rightarrow$ • Minimum aus $C^1[a,b]$ <u>ohne</u> $y(a) = y_a$, $y(b) = y_b$? $\Leftarrow$

<u>Satz</u>

Jede hinreichend glatte Lösung $y_0 : [a,b] \to \mathbb{R}$ von

Minimiere $I[y] = \int_a^b f(t, y, y')\,dt$

(ohne vorgegebene Randbedingungen) löst die RWA

$$\frac{\partial f}{\partial y}(t, y_0, y_0') - \frac{d}{dt}\frac{\partial f}{\partial y'}(t, y_0, y_0') = 0$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial y'}(a, y_0(a), y_0'(a)) &= 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y'}(b, y_0(b), y_0'(b)) &= 0 \end{aligned}\right\} \quad (*)$$

$(*)$ heißen natürliche Randbedingungen

<u>Beispiel</u>

$$\int_a^b y'^2\,dt = \min, \qquad y \in C^1[a,b]$$

Offensichtlich ?

$y' = 0$

$\Rightarrow y = a$ (beliebig)

$\underset{\text{Satz}}{\Longrightarrow}$ $\quad \frac{1}{2}y'' = 0 \longrightarrow y = bt + a$

$$\left.\begin{aligned} y'(a) &= 0 \\ y'(b) &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow y = a$$

$y_0 : a \le t \le b \to \mathbb{R}$ minimiert

$$I[y] = \int_a^b f(t, y, y')\,dt$$

$\Longrightarrow$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(t, y_0, y_0') - \frac{d}{dt}\frac{\partial f}{\partial y'}(t, y_0, y_0') = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y'}(a, y_0(a), y_0'(a)) = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y'}(b, y_0(b), y_0'(b)) = 0$$

<u>Beweis</u>

$$\frac{d}{d\varepsilon} I[y_0 + \varepsilon h]\Big|_{\varepsilon = 0} = \int_a^b \left(\frac{\partial f}{\partial y}(t, y_0, y_0') - \frac{d}{dt}\frac{\partial f}{\partial y'}(t, y_0, y_0')\right) h(t)\,dt$$

$$+ \frac{\partial f}{\partial y'}(t, y_0, y_0')\, h(t)\Big|_a^b \overset{!}{=} 0$$

Diese Summe muß für alle $h(t)$ zu Null werden

$$\Longrightarrow \frac{\partial f}{\partial y}(t, y_0, y_0') - \frac{d}{dt}\frac{\partial f}{\partial y'}(t, y_0, y_0') = 0$$

$$\Longrightarrow \frac{\partial f}{\partial y'}(a, y_0(a), y_0'(a)) = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y'}(b, y_0(b), y_0'(b)) = 0 .$$

Variationsrechnung

$\Downarrow$

(Nichtlineare) RWAen zweiter Ordnung

Jetzt

Lineare RWAen zweiter Ordnung

$$L[y] := y''(t) + a_1(t)\, y'(t) + a_0(t)\, y(t) = h(t)$$
$$R_1[y] := \alpha_1 y(a) + \beta_1 y'(a) + \gamma_1 y(b) + \delta_1 y'(b) = d_1$$
$$R_2[y] := \alpha_2 y(a) + \beta_2 y'(a) + \gamma_2 y(b) + \delta_2 y'(b) = d_2$$

Ermittlung von Lösungen ?

Möglichkeiten:
1. Einfach lösen
2. Satz aus Vorlesung (E, ... usw)
3. Green'sche Funktion ←

1. Möglichkeit

Aufgabe so einfach, dass Lösung sofort ermittelt werden kann:

$$y'' + y = 0 \longrightarrow y(t) = \alpha \cos t + \beta \sin t$$
$$y(0) = 1 \longrightarrow \alpha = 1$$
$$y'(\pi) = 0 \longrightarrow \beta = 0$$

$$\Longrightarrow y(t) = \cos t$$

$$L[y] := y''(t) + a_1(t)y'(t) + a_0(t)y(t) = h(t)$$
$$R_1[y] := \alpha_1 y(a) + \beta_1 y'(a) + \gamma_1 y(b) + \delta_1 y'(b) = d_1$$
$$R_2[y] := \alpha_2 y(a) + \beta_2 y'(a) + \gamma_2 y(b) + \delta_2 y'(b) = d_2$$

2. Möglichkeit (Erinnerung)

Umwandeln in System erster Ordnung und das aus vorangegangener Vorlesung benutzen:

$$\text{Setze } \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}$$

$$\leadsto \quad y_2' = y'' = -a_1 y' - a_0 y + h(t) = -a_1 y_2 - a_0 y_1 + h(t)$$

DGL.-System (*)

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} y_2 \\ -a_1(t)y_2 - a_0(t)y_1 + h(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a_0(t) & -a_1(t) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ h(t) \end{pmatrix}$$

Randbedingungen

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{pmatrix}}_{B_a}\begin{pmatrix} y_1(a) \\ y_2(a) \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} \gamma_1 & \delta_1 \\ \gamma_2 & \delta_2 \end{pmatrix}}_{B_b}\begin{pmatrix} y_1(b) \\ y_2(b) \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix}}_{d}$$

Sei $Y(t)$ FS zu * und $E = B_a Y(a) + B_b Y(b)$

Allgemeine Lösung der DGL

$$y(t) = Y(t)c + y_p$$

c gesucht

$$Ec = d - B_a y_p(a) - B_b y_p(b)$$

E regulär $\Rightarrow$ c eindeutig bestimmt $\Rightarrow$ Lösung

3. Möglichkeit (Green'schen-Funktion)
Setzt voraus

1. RWA eindeutig lösbar
2. RWA liegt in halbhomogener Form vor

1. Voraussetzung ist gleichwertig zu

$$L[y]=0$$
$$R_1[y]=0 \quad \text{hat nur die triviale Lösung}$$
$$R_2[y]=0$$

2. Voraussetzung.
Die RWAle muß in der Form

$$L[y] = h(t)$$
$$R_1[y] = 0$$
$$R_2[y] = 0 \qquad \text{vorliegen!}$$

Kann die ursprüngliche Aufgabe stets in eine solche überführt werden? Antwort: Ja!!!

Wähle $y_0 \in C^2[a,b]$ mit $\begin{aligned} R_1[y_0] &= d_1 \\ R_2[y_0] &= d_2 \end{aligned}$

Setze
$$y(t) = y_0(t) + z(t)$$

$$L[z] = L[y-y_0] = L[y]-L[y_0] = h-L[y_0] =: \tilde{h}$$
$$R_1[z] = R_1[y-y_0] = R_1[y]-R_1[y_0] = d_1-d_1=0$$
$$R_2[z] = R_2[y-y_0] = R_2[y]-R_2[y_0] = d_2-d_2=0$$

ist die Aufgabe

$$\begin{aligned} L[y] &= h(t) \\ R_1[y] &= 0 \\ R_2[y] &= 0 \end{aligned}$$

eindeutig lösbar, dann kann die Lösung in der Form

$$y(t) = \int_a^{\ell} \underbrace{G(t,\tau)}_{\text{Green'sche Funktion}} h(\tau)\, d\tau$$

dargestellt werden

Beispiel

Betrachte die Aufgabe

$$\begin{aligned} -y'' &= h(t) \\ y(0) &= 0 \qquad \ell > 0 \\ y(\ell) &= 0 \end{aligned}$$

(Die Aufgabe $-y'' = 0$, $y(0) = y(\ell) = 0$, hat nur die triviale Lösung. RWA in halbhomogener Form)

$$y(t) = \int_0^{\ell} G(t,\tau)\, h(\tau)\, d\tau$$

$$G(t,\tau) = \begin{cases} \frac{\tau}{\ell}(\ell - t) & 0 \le \tau \le t \le \ell \\ \frac{t}{\ell}(\ell - \tau) & 0 \le t \le \tau \le \ell \end{cases}$$

Wir wollen dieses beweisen !!!

$$-y'' = h(t), \quad y(0) = 0, \quad y(l) = 0, \qquad l > 0 \qquad \longrightarrow \qquad y(t) = \int_0^l G(t,\tau)\, h(\tau)\, d\tau$$

Zweckmäßig für das Folgende:

Bestimmung einer speziellen Lösung von $-y'' = h(t)$ mit <u>Grundlösungsmethode</u>

Wiederholung bzw. Einschub: Grundlösungsmethode

$$y'' + a_1 y' + a_0 y = h(t) \qquad a_i \in \mathbb{R} \qquad (*)$$

Es sei w die Lösung von

$$y'' + a_1 y' + a_0 y = 0$$
$$y(0) = 0$$
$$y'(0) = 1$$

$$\longrightarrow \qquad y_p(t) = \int_0^t w(t-\tau)\, h(\tau)\, d\tau \quad \text{Lösung von } (*)$$

Beweis:

$$\frac{d}{dt} y_p(t) = \int_0^t w'(t-\tau)\, h(\tau)\, d\tau + w(0)\, h(t)$$

$$\frac{d^2}{dt^2} y_p(t) = \int_0^t w''(t-\tau)\, h(\tau)\, d\tau + w'(0)\, h(t)$$

$$y_p''(t) + a_1 y_p'(t) + a_0 y_p(t) = h(t) + \int_0^t w''(t-\tau)\, h(\tau) + \cdots\cdots +$$
$$\cdots\cdots$$
$$= h(t) \quad !!!$$

$$-y''(t) = h(t) \quad (**) \qquad\qquad -w'' = 0$$
$$y(0) = 0 \quad \rightsquigarrow \quad w(0) = 0 \quad \Longrightarrow \quad w(t) = +t$$
$$y(\ell) = 0 \qquad\qquad w'(0) = 1$$

Allgemeine Lösung von (**)

$$y(t) = \cancel{c_1 +}\, c_2 t + \int_0^t -(t-\tau)\,h(\tau)\,d\tau$$

Anpassung an Randbedingungen

$$y(0) = 0 \quad \Longrightarrow \quad c_1 = 0$$
$$y(\ell) = 0 \quad \Longrightarrow \quad c_2\ell + \int_0^\ell (\tau-\ell)\,h(\tau)\,d\tau = 0$$
$$\Longrightarrow \quad c_2 = -\frac{1}{\ell}\int_0^\ell (\tau-\ell)\,h(\tau)\,d\tau$$

Lösung der RWA

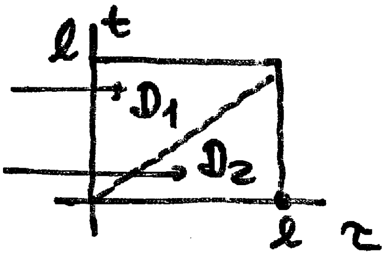
$$y(t) = -\frac{t}{\ell}\int_0^\ell (\tau-\ell)\,h(\tau)\,d\tau + \int_0^t (\tau-t)\,h(\tau)\,d\tau$$

$$y(t) = -\int_0^t \frac{t}{\ell}(\tau-\ell)\,h(\tau)\,d\tau - \int_t^\ell \frac{t}{\ell}(\tau-\ell)\,h(\tau)\,d\tau + \int_0^t (\tau-t)\,h(\tau)\,d\tau$$

$$-\frac{t}{\ell}(\tau-\ell) + (\tau-t) = -\frac{t}{\ell}(\tau-\cancel{\ell}) + \frac{\ell}{\ell}(\tau-\cancel{t}) = \frac{\tau}{\ell}(\ell-t)$$

$$y(t) = \int_0^t \frac{\tau}{\ell}(\ell-t)\,h(\tau)\,d\tau + \int_t^\ell \frac{t}{\ell}(\ell-\tau)\,h(\tau)\,d\tau$$

$$G(t,\tau) = \begin{cases} \frac{\tau}{\ell}(\ell-t) & 0 \le \tau \le t \le \ell \\ \frac{t}{\ell}(\ell-\tau) & 0 \le t \le \tau \le \ell \end{cases}$$



$$y(t) = \int_0^\ell G(t,\tau)\,h(\tau)\,d\tau \quad !!!$$

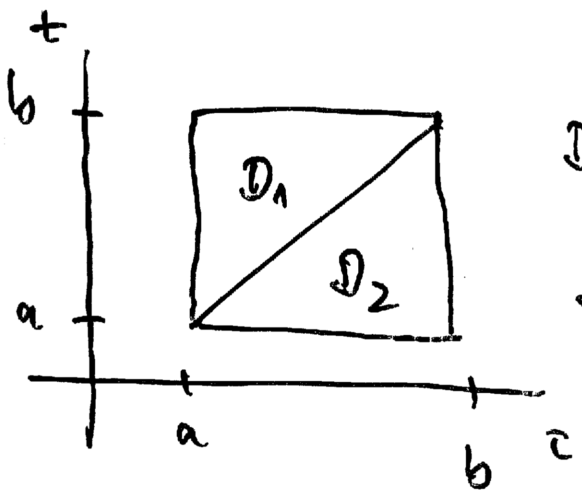
Gegeben sei die eindeutig lösbare, lineare und halbhomogene Randwertaufgabe zweiter Ordnung

$$L[y] = h(t)$$
$$R_1[y] = 0$$
$$R_2[y] = 0$$

Gesucht ist eine Funktion G auf $D = [a,b] \times [a,b]$ (Green'sche Funktion) mit

$$y(t) = \int_a^b G(t,\tau)\, h(\tau)\, d\tau$$

Eine solche (Green'sche) Funktion gibt es! Diese hat gewisse Eigenschaften in den Bereichen D_1 und D_2 aus $[a,b] \times [a,b]$



$D_1: \ a \le \tau \le t \le b$

$D_2: \ a \le t \le \tau \le b$

Die gesuchte Green'sche Funktion wird durch folgende Eigenschaften charakterisiert:

<u>Satz</u>

Erfüllt eine Funktion (Green'sche Funktion) $G(t,\tau)$ die folgenden Eigenschaften

1) $G(t,\tau)$ ist stetig auf $[a,b]\times[a,b]$ und läßt sich auf jeden der Bereiche D_1 und D_2 als C^2-Funktion fortsetzen

2) $G(t,\tau)$ erfüllt für festes τ die homogene Gleichung

$$L[G(\cdot,\tau)]=0 \qquad t\in[a,\tau] \text{ und } t\in[\tau,b]$$

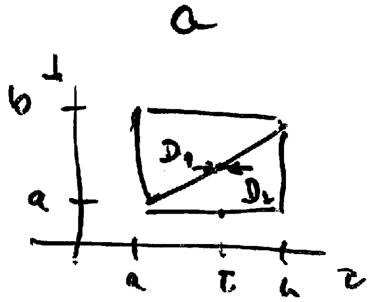
und die Randbedingungen

$$R_1[G(\cdot,\tau)]=0 \qquad R_2[G(\cdot,\tau)]=0$$

3) $G_t(t,t^-) - G_t(t,t^+) = 1$

dann ist die Lösung der Randwertaufgabe gegeben durch

$$y(t) = \int_a^b G(t,\tau)h(\tau)d\tau$$



Allgemeines Prinzip zur Konstruktion der Green'schen Funktion:

1. Bestimme FS der homogenen Gleichung

$$y_1(t)\,,\quad y_2(t)$$

Setze

$$G(t,\tau)=\begin{cases}(a_1(\tau)+b_1(\tau))y_1(t)+(a_2(\tau)+b_2(\tau))y_2(t) & \tau\le t\\ (a_1(\tau)-b_1(\tau))y_1(t)+(a_2(\tau)-b_2(\tau))y_2(t) & t\le\tau\end{cases}$$

2. Stetigkeit bei $t=\tau$

$$\Rightarrow 2\big(b_1(t)y_1(t)+b_2(t)y_2(t)\big)=0$$

Sprungbedingung bei $t=\tau$

$$G_t(t,\tau)=\begin{cases}(a_1(\tau)+b_1(\tau))y_1'(t)+(a_2(\tau)+b_2(\tau))y_2'(t) & \tau\le t\\ (a_1(\tau)-b_1(\tau))y_1'(t)+(a_2(\tau)-b_2(\tau))y_2'(t) & t\le\tau\end{cases}$$

$$\Rightarrow b_1(t)y_1'(t)+b_2(t)y_2'(t)=\frac{1}{2}$$

Insgesamt

$$\begin{pmatrix}y_1(t) & y_2(t)\\ y_1'(t) & y_2'(t)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b_1(t)\\ b_2(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 1/2\end{pmatrix}$$

Eindeutig lösbar!!!

3) Einsetzen der entstehenden Funktion in die Randbedingungen liefert $a_1(\cdot)$ und $a_2(\cdot)$

$$R_i[G(\cdot,\tau)] = 0 \qquad i = 1,2$$

$$R_1[G] = \alpha_1 G(a,\tau) + \beta_1 G_t(a,\tau) + \gamma_1 G(b,\tau) + \delta_1 G_t(b,\tau) = 0$$
$$R_2[G] = \alpha_2 G(a,\tau) + \beta_2 G_t(a,\tau) + \gamma_2 G(b,\tau) + \delta_2 G_t(b,\tau) = 0$$

$$G(a,\tau) = (a_1(\tau) - b_1(\tau))\, y_1(a) + (a_2(\tau) - b_2(\tau))\, y_2(a)$$
$$G(b,\tau) = (a_1(\tau) + b_1(\tau))\, y_1(b) + (a_2(\tau) + b_2(\tau))\, y_2(b)$$
$$G_t(a,\tau) = (a_1(\tau) - b_1(\tau))\, y_1'(a) + (a_2(\tau) - b_2(\tau))\, y_2'(a)$$
$$G_t(b,\tau) = \quad \ldots\ldots \quad " \quad \ldots\ldots$$

Es ergibt sich das folgende Gleichungssystem

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{pmatrix}}_{B_a} \underbrace{\begin{pmatrix} y_1(a) & y_2(a) \\ y_1'(a) & y_2'(a) \end{pmatrix}}_{Y(a)} \begin{pmatrix} a_1(\tau) \\ a_2(\tau) \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} \gamma_1 & \delta_1 \\ \gamma_2 & \delta_2 \end{pmatrix}}_{B_b} \underbrace{\begin{pmatrix} y_1(b) & y_2(b) \\ y_1'(b) & y_2'(b) \end{pmatrix}}_{Y(b)} \begin{pmatrix} a_1(\tau) \\ a_2(\tau) \end{pmatrix} = \text{——}$$

$$B_a Y(a) + B_b Y(b) = \text{etwas bekanntes}$$

$\Longrightarrow$ Eindeutig lösbar !!!

Beispiel

$$y'' + y = h(t)$$
$$y(0) - y(\pi) = 0$$
$$y'(0) - y'(\pi) = 0$$

periodische Randbedingungen

$a = 0$ $\quad$ $b = \pi$

$$\alpha_1 = 1 \quad \beta_1 = 0 \quad \gamma_1 = -1 \quad \delta_1 = 0$$
$$\alpha_2 = 0 \quad \beta_2 = 1 \quad \gamma_2 = 0 \quad \delta_2 = -1$$

FS: $\quad y'' + y = 0$

charakteristisches Polynom $\quad \lambda^2 + 1 = 0 \quad \lambda_{1,2} = \pm i$

$\rightsquigarrow$ komplexes FS $\quad e^{it}, e^{-it}$

$\rightsquigarrow$ reelles FS $\quad \sin t \quad \cos t$

$$y_1(t) = \cos t \qquad y_2(t) = \sin t$$

$$G(t,\tau) = \begin{cases} (a_1(\tau) + b_1(\tau)) \cos t + (a_2(\tau) + b_2(\tau)) \sin t & \tau \le t \\ (a_1(\tau) - b_1(\tau)) \cos t + (a_2(\tau) - b_2(\tau)) \sin t & \tau \ge t \end{cases}$$

Stetigkeit von G für $\tau = t$

$$b_1(t) \cos t + b_2(t) \sin t = 0$$

Sprungbedingung der Ableitung von G für $\tau = t$

$$-b_1(t) \sin t + b_2(t) \cos t = \frac{1}{2}$$

$$\begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1(t) \\ b_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \end{pmatrix}$$

$$b_1(t) = -\frac{1}{2} \sin t \qquad b_2(t) = \frac{1}{2} \cos t$$

Bestimmung von $a_1(\cdot)$ und $a_2(\cdot)$

$G(\cdot,\tau)$ muß als Funktion von t die Randbedingungen erfüllen!

$$G(0,\tau)-G(\pi,\tau) = (a_1(\tau)-b_1(\tau))\cos(0)+(a_2(\tau)-b_2(\tau))\sin 0$$
$$-(a_1(\tau)+b_1(\tau))\cos\pi-(a_2(\tau)+b_2(\tau))\sin\pi$$

$$G_t(0,\tau)-G_t(\pi,\tau) = -(a_1(\tau)-b_1(\tau))\sin(0)+(a_2(\tau)-b_2(\tau))\cos(0)$$
$$+(a_1(\tau)+b_1(\tau))\sin(\pi)-(a_2(\tau)+b_2(\tau))\cos(\pi)$$

$$G(0,\tau)-G(\pi,\tau) = (a_1(\tau)-b_1(\tau))+(a_1(\tau)+b_1(\tau))=0$$
$$G_t(0,\tau)-G_t(\pi,\tau) = (a_2(\tau)-b_2(\tau))-(a_2(\tau)-b_2(\tau))=0$$

$$\Longrightarrow \quad a_1(\tau)=a_2(\tau)=0$$

$$\Longrightarrow \quad G(t,\tau)=\begin{cases}-\frac{1}{2}\sin\tau\cos t+\frac{1}{2}\cos\tau\sin t & \tau\leq t\\ \frac{1}{2}\sin\tau\cos t-\frac{1}{2}\cos\tau\sin t & t\leq\tau\end{cases}$$

$$=\begin{cases}\frac{1}{2}\sin(t-\tau)\\ -\frac{1}{2}\sin(t-\tau)\end{cases}$$

$$\Longrightarrow \quad y(t)=\int_0^\pi G(t,\tau)h(\tau)d\tau$$
$$=\frac{1}{2}\int_0^t \sin(t-\tau)h(\tau)d\tau-\frac{1}{2}\int_t^\pi \sin(t-\tau)h(\tau)d\tau$$

Eigenwertaufgaben

homogenes lineares RWproblem n-ter Ordnung

$$L[y] = y^{(n)}(t) + a_{n-1}(t,\lambda)\, y^{(n-1)}(t) + \cdots + a_0(t,\lambda)\, y(t) = 0$$

$$R_1[y] = \sum_{l=0}^{n-1} [\alpha_{1,l}(\lambda) y^{(l)}(a) + \beta_{1,l}(\lambda) y^{(l)}(b)] = 0$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

$$R_n[y] = \sum_{l=0}^{n-1} [\alpha_{n,l}(\lambda) y^{(l)}(a) + \beta_{n,l}(\lambda) y^{(l)}(b)] = 0$$

Frage: Für welche $\lambda \in \mathbb{C}$ gibt es nichttriviale Lösungen der RWA?

$(y_1, \ldots, y_n)$ sei FS $\quad L[y_i] = 0 \quad y_i = y_i(t,\lambda)$

Allgemeine Lösung

$$y(t) = \sum_{j=1}^{n} c_j y_j(t,\lambda)$$

Einsetzen in RWA

$$R_1[y] = \sum_{j=1}^{n} c_j R_1[y_j] = 0$$

$$\vdots$$

$$R_n[y] = \sum_{j=1}^{n} c_j R_n[y_j] = 0$$

oder

$$E(\lambda)(c) = \begin{pmatrix} R_1[y_1] & \cdots & R_1[y_n] \\ \\ R_n[y_1] & \cdots & R_n[y_n] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = 0$$

Nichttriviale Lösungen existieren, wenn

$$D(\lambda) = \det(E(\lambda)) = 0$$

λ Eigenwerte

y Eigenfunktionen

Beispiel

$$y'' + \lambda^2 y = 0$$
$$y(0) = y(1) = 0$$

Allgemeine Lösung

$$y(t) = c_1 \cos \lambda t + c_2 \sin \lambda t$$

$$y(0) = 0 \quad \Longrightarrow \quad c_1 = 0$$
$$y(1) = 0 \quad \Longrightarrow \quad c_2 \sin(\lambda) = 0$$

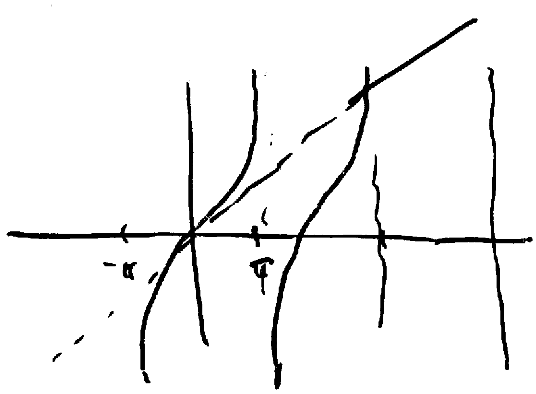
$$\Longrightarrow \quad \lambda_k = k\pi \quad k = \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Eigenfunktion $\sin \lambda_k t$

$$y'' + \lambda^2 y = 0$$
$$y(0) = 0 \qquad \Longrightarrow \quad c_1 = 0$$
$$y(1) = y'(1) \qquad \Longrightarrow \quad c_2(\sin\lambda - \lambda\cos\lambda) = 0$$

λ_k müssen genügen $\lambda = \tan\lambda$

Eigenfunktionen $y_k(t) = \begin{cases} \sin \lambda_k t & \lambda_k \neq 0 \\ t & \lambda_k = 0 \end{cases}$



$\lambda = \tan\lambda$