Vorlesung DGL I 14.12.07

TAUBERT

Stabilität

<u>Beispiel</u> 1 (16.11.07)

$y' = Ly$ mit $\rightarrow$ $y(0) = y_0$

$L \in \mathbb{R}$ $\rightarrow$ $y(0) = y_0'$

zwei Anfangsbedingungen

Lösungen

$y(t) = y_0 e^{Lt} \longleftrightarrow y(t; 0, y_0)$

$y(t) = y_0' e^{Lt} \longleftrightarrow y(t; 0, y_0')$

$$|y(t;0,y_0) - y(t;0,y_0')| \leq |y_0 - y_0'| e^{L|t|}$$

Jetzt $t \in I$ kompakter Intervall (endlich + abgeschlossen)

$$|y(t;0,y_0) - y(t;0,y_0')| \leq M |y_0 - y_0'| \leftarrow$$

$$M = \max_{t \in I} e^{L|t|}$$

$\rightarrow$ "kleine" Änderungen in y_0

$\Rightarrow$ "kleine" Änderungen in $y(t;0,y_0)$

Salopp: DGL $y' = Ly$ "stabil" bez. Änderungen der Anfangsbedingungen auf <u>kompakten</u> Intervallen

Beispiel 2 (16.11.07)

$$y' = f(t,y)$$

$y(t_0) = y_0$ bzw. $y(t_0) = y_0'$

Sei $f(t,y)$ wie im Satz von Picard-Lindelöf
also insbesondere

- f stetig
- $\| f(t,u) - f(t,v) \| \leq K \| u - v \|$

$$\| y(t;t_0,y_0) - y(t;t_0,y_0') \| \leq e^{K|t-t_0|} \| y_0 - y_0' \|$$

$t \in I$ kompaktes Intervall

$$\Longrightarrow \quad \| y(t;t_0,y_0) - y(t;t_0,y_0') \| \leq M' \| y_0 - y_0' \|$$

Salopp: Auf kompakten Intervallen I führen "kleine" Änderungen in den Anfangsbedingungen zu "kleinen" Änderungen in den Lösungen
$\rightarrow$ DGL $y' = f(t,y)$ "stabil" bzg. Änderungen der Anfangsbedingungen ...

<u>Beispiel</u> 3 (Weiterer Aspekt)

Verhalten für $t \to \infty$?

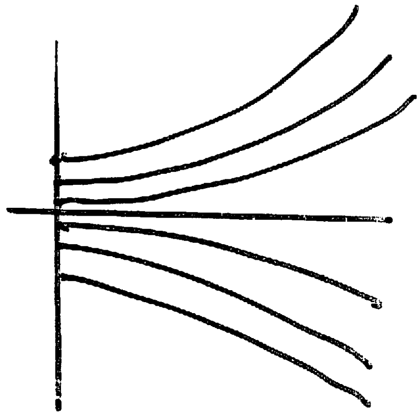
Verhalten der Lösungen in Relation zu speziellen Lösungen?

$$y' = Ly \;, \quad L \in \mathbb{R} \;, \qquad y(t) = y(0)\,e^{Lt}$$

Eine Lösung ist zeitlich unveränderlich, nämlich

$y^* \equiv 0$ (Gleichgewichtspunkt) Lösung ↓

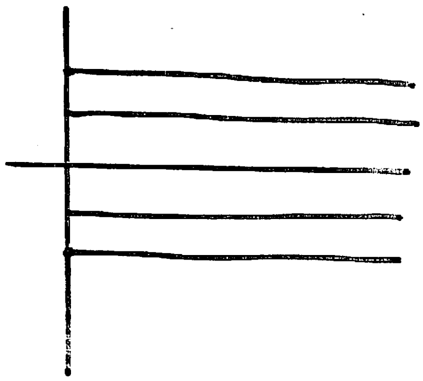
$L > 0$



$y^* \equiv 0$ instabil auf $([0,\infty))$

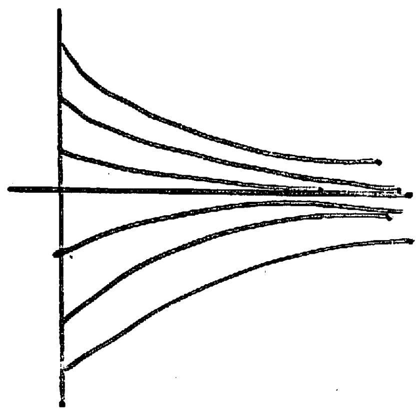
Verhalten der Lösungen in Relation zu $y^* \equiv 0$

$L = 0$



$y^* \equiv 0$ stabil auf $([0,\infty))$

$L < 0$



$y^* \equiv 0$ asymptotisch stabil auf $([0,\infty))$

Definition (Stabilität)

$$y' = f(t,y) \qquad y(t_0) = y_0$$

$$f \in C(I \times \mathbb{R}^n)$$

$$I = [t_0, \infty)$$

Die DGL habe stets eine eindeutige Lösung

<u>Definition:</u>

a) Eine <u>Lösung</u> $y^*(t)$ mit $y^*(t_0) = y_0^*$ und Definitionsbereich $I = [t_0, \infty)$ heißt stabil, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so daß
$\forall\, y_0$ mit $\| y_0 - y^*(t_0) \| < \delta \Rightarrow \| y(t; t_0, y_0) - y^*(t) \| < \varepsilon$

b) Eine <u>Lösung</u> $y^*(t)$ heißt asymptotisch stabil auf $I = [t_0, \infty)$ falls $y^*(t)$ stabil ist, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so daß
$\forall\, y_0$ mit $\| y_0 - y^*(t_0) \| < \delta \Rightarrow$

$$\lim_{t \to \infty} \| y(t; t_0, y_0) - y^*(t) \| = 0$$

c) $y^*(t)$ heißt instabil, falls $y^*(t)$ nicht stabil

<u>Salopp:</u> stabil "benachbarte" Lösungen bleiben "benachbart"
asym. stabil "benachbarte" Lösungen nähern sich $y^*(t)$

Beispiel (stabil auf $[t_0,\infty)$)

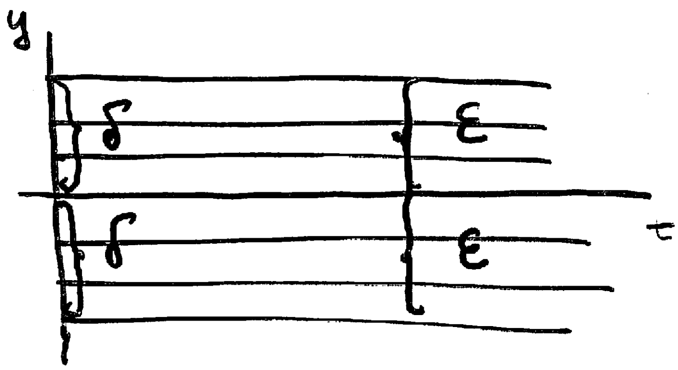
$y^*(t)$ stabil auf $[t_0,\infty)$: Zu $\varepsilon > 0$ existiert $\delta > 0$

$\forall y_0$ mit $\| y_0 - y^*(t_0) \| < \delta \Rightarrow \| y(t;t_0,y_0) - y^*(t) \| < \varepsilon$

$y' = Ly$

$y^*(t) \equiv 0$

$L = 0$

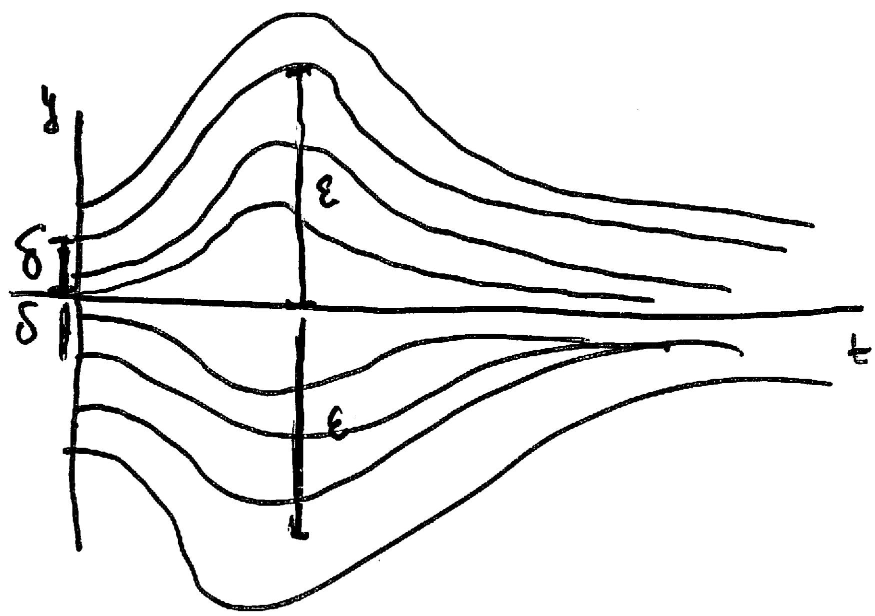


Wähle $\delta = \varepsilon$

<u>Allgemeiner</u>

$y' = f(t,y)$

$y^*(t) \equiv 0$

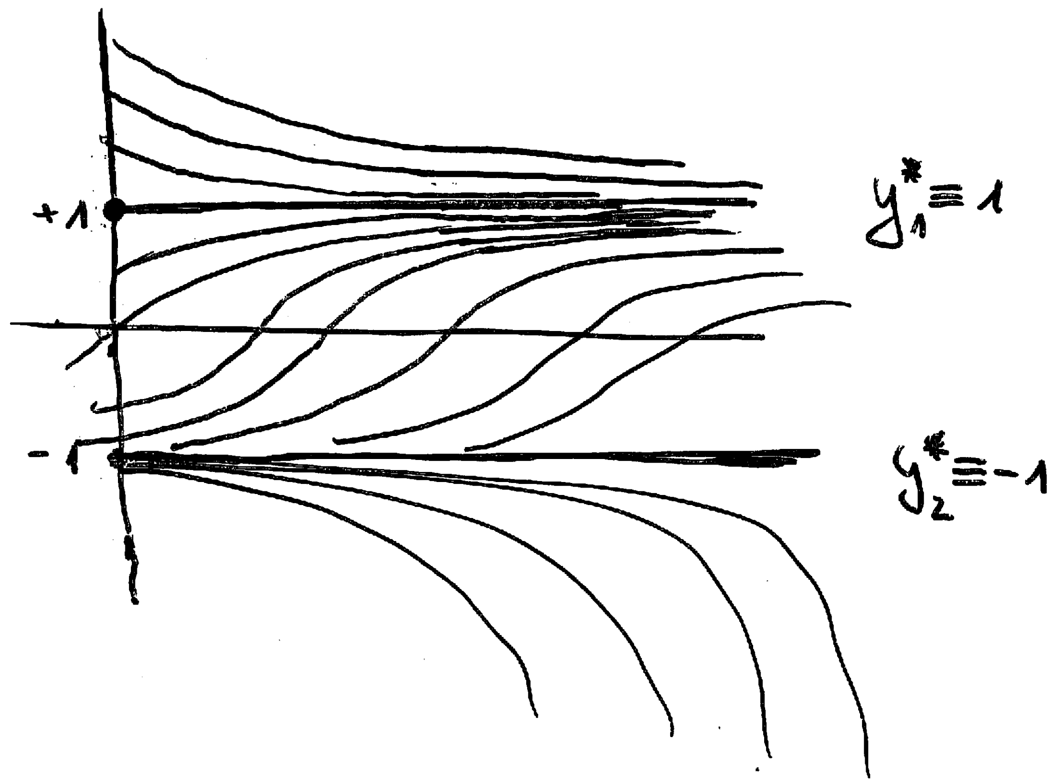


Also $\delta \neq \varepsilon$

<u>Beispiel</u> (asymptotisch stabil, instabil)

Erinnerung (Präsenzübungen)

$$y' = 1 - y^2$$



$y_1^* \equiv 1$ stabil asymptotisch stabil auf $[0,\infty)$

$y_2^* \equiv -1$ instabil auf $[0,\infty)$

Bemerkung:

Man kann sich theoretisch auf die Untersuchung der Stabilität der Null-Lösung $y \equiv 0$ beschränken:

$y^*(\cdot)$ sei stabile Lösung von $y^{*\prime}(t) = f(t, y^*(t))$ auf $[t_0, \infty)$

$y(\cdot)$ sei beliebige Lösung von $y'(t) = f(t, y(t))$ auf $[t_0, \infty)$

Es sei

$$z(t) := y(t) - y^*(t)$$

$$z'(t) = \underline{y'(t)} - \underline{y^{*\prime}(t)} = f(\underline{t, z(t) + y^*(t)}) - f(\underline{t, y^*(t)})$$
$$= \tilde{f}(t, z(t))$$

Nach Konstruktion ist $z^*(t) \equiv 0$ eine Lösung von

$$z' = \tilde{f}(t, z)$$

Stabilität bei linearen DGL's

$$y'(t) = A(t)\,y(t)$$

Frage: Ist $y \equiv 0$ stabil, asymptotisch stabil oder instabil?

Es sei $Y(t)$ FS, dann ist die allgemeine Lösung gegeben durch

$$y(t) = Y(t)\,c \qquad c \in \mathbb{R}^n$$

Lösung mit Anfangswert $y(t_0) = y_0$ ist

$$y(t) = Y(t)\,Y^{-1}(t_0)\,y_0 .$$

Satz

a) $y^* \equiv 0$ ist genau dann stabil auf $I = [t_0, \infty)$ falls FS $Y(t)$ auf I beschränkt ist

b) $y^* \equiv 0$ ist genau dann asymptotisch stabil auf $I = [t_0, \infty)$, falls

$$\lim_{t \to \infty} \| Y(t) \| = 0$$

$$y' = A(t)\,y$$

a) $y^* = 0$ stabil $\iff$ $\|Y(t)\| \le M \quad \forall t$

b) $y^* = 0$ asymptotisch stabil $\iff$ $\lim\limits_{t\to\infty} \|Y(t)\| = 0$

Beweis

a) $\Leftarrow$ $\quad \|Y(t)\| \le M \quad \forall t \in [t_0, \infty)$

$$\|y(t)\| = \|Y(t)\,Y^{-1}(t_0)\,y_0\| \le \|Y(t)\|\,\|Y^{-1}(t_0)\|\,\|y_0\|$$

$$\|y(t) - \underset{0}{y^*}\| \le M\,\|Y^{-1}(t_0)\|\,\|y(t_0) - 0\|$$

$\varepsilon > 0$ vorgeben : Wähle $\delta = \dfrac{\varepsilon}{M\,\|Y^{-1}(t_0)\|}$

b) $\Leftarrow$

$$\|y(t)\| = \|Y(t)\,Y^{-1}(t_0)\,y_0\| \le \|Y(t)\|\,\|Y(t_0)^{-1}\|\,\|y_0\|$$

$$\lim_{t\to\infty} \|Y(t)\| = 0 \implies \|y(t)\| \to 0$$

Beispiel

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \qquad (\Leftrightarrow y'' + y = 0)$$

$$y^* = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ stabil ?}$$

FS ?

$$\det(A - \lambda E) = \lambda^2 + 1 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm i$$

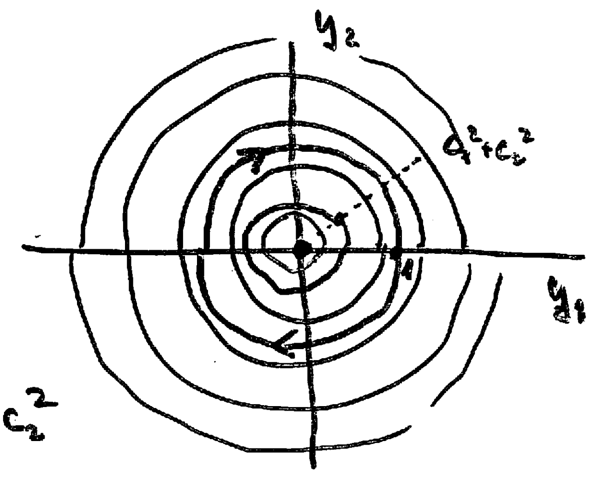
komplexe FS $\quad Y(t) = \left(e^{it} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}, e^{-it} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} \right)$

reelle FS $\quad Y(t) = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}$

$$\|Y(t)\| \leq M \qquad \|Y(t)\| \underset{t \to \infty}{\not\to} 0$$

Illustration und wichtig: graphische Darstellung der Lösung im "Phasenraum"

$$\begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix} \quad \longleftrightarrow \quad \begin{array}{l} c_1 \cos t + c_2 \sin t = y_1(t) \\ -c_1 \sin t + c_2 \cos t = y_2(t) \end{array}$$



$$y_1^2 + y_2^2 = c_1^2 + c_2^2$$

$c_2 = 0$
$c_1 = 1$

Stabilität bei linearen DGL's mit konstanten Koeffizienten

$$y' = Ay$$

FS kann angegeben werden:

z.B. A diagonalisierbar $\longrightarrow$ λ_i, v_i Eig.- + Eigvekt..

komplexes FS $\quad Y(t) = (e^{\lambda_1 t} v_1, \dots, e^{\lambda_n t} v_n)$

Frage $\quad y^* = 0$ asymptotisch stabil ?
stabil ?

<u>Satz</u>

a) $y^* = 0$ genau dann stabil, falls für die Eigenwerte von A gilt

- $\mathrm{Re}(\lambda_j) \leq 0$
- $\mathrm{Re}(\lambda_j) = 0 \Longrightarrow$ algebraische Vielfachheit = geometrische Vielfachheit

b) $y^* = 0$ genau dann asymptotisch stabil, falls für die Eigenwerte von A gilt

$$\mathrm{Re}(\lambda_j) < 0$$

Beweis: 1.

a) geom Viel = algebra Viel..

$Y(t) = (e^{\lambda_1 t} v_1, \dots, e^{\lambda_n t} v_n)$ $\quad \|Y(t)\| = \|(v_1, \dots, v_n)\|$

2. geom Viel.. $\neq$ algebra Viel..

$Y(t) = (e^{\lambda_1 t} v_1, e^{\lambda_1 t}(t v_1 + v_{11}), \dots)$ falls $\mathrm{Re}\,\lambda_1 = 0$
$\Longrightarrow$ unbeschränkt

b) $\|Y(t)\| \xrightarrow[t \to \infty]{} 0$

Beispiel

$$y' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} y$$

$$\det(A - \lambda E) = 0 \iff \lambda^2 = 0 \implies \lambda_{1,2} = 0$$

Eigenwert $\lambda_1 = 0$ Eigenvektor $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

A nicht diagonalisierbar

Hauptvektor $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} v_{11} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\implies v_{11} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$FS \iff Y(t) = \left(e^{0t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e^{0t} \left(t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \right)$$

$$= \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

$y_1 = c_1 + c_2 t$ $\quad y^* \equiv 0$

$y_2 = c_2$ $\quad \longrightarrow$ Instabil !!!

Beispiel

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} \iff y' = Ay$$

Gleichgewichtspunkt $\iff$ Konstante Lösung für alle Zeiten

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$y^*(t) = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ asymptotisch stabil ?

Transformation

$$z = y - y^*$$

$\longrightarrow \quad z' = Az$

$z^*(t) \equiv 0$ asymptotisch stabil ?

Eigenwerte von A

$\det(A - \lambda E) = 0 \Longrightarrow \lambda_{1,2} = -1 \pm i$

$\Longrightarrow z^*$ asymptotisch stabil $\Longrightarrow y^*$ asymp. stabil

Jetzt 2×2 Systeme

$$y' = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} y \iff y' = Ay$$

Qualitatives Verhalten für $t \to \infty$?

Ähnlichkeitstransformation $\begin{smallmatrix}\text{stabil}\\ \text{instabil}\end{smallmatrix}$?

$$Sy' = SAS^{-1}Sy \longrightarrow w' = Jw$$

Jordan'sche Normalform

$$S = (v_1, v_2) \quad \begin{cases} v_1 & \text{Eigenvektor zu } A \\ v_2 & \text{Eigenvektor zu } A \text{ bzw. Hauptvektor} \end{cases}$$

Mehrere Möglichkeiten

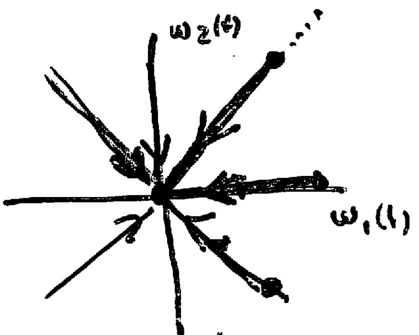
$$J = S^{-1}AS = \begin{cases} \text{Fall 1}: & \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \quad \lambda_1 \neq \lambda_2 \text{ oder } \lambda_2 = \lambda_1 = \lambda,\ g(\lambda) = 2 \\ \text{Fall 2}: & \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \quad g(\lambda) = 1 \end{cases}$$

<u>Fall 1</u>

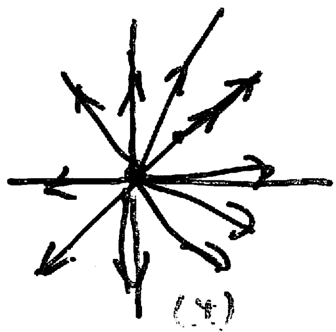
λ_1, λ_2 reell, $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ $\quad g(\lambda) = 2$ $\quad w' = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} w$

$$w_1 = c_1 e^{\lambda t} \qquad w_2 = c_2 e^{\lambda t}$$

$\lambda < 0$ $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $\lambda > 0$



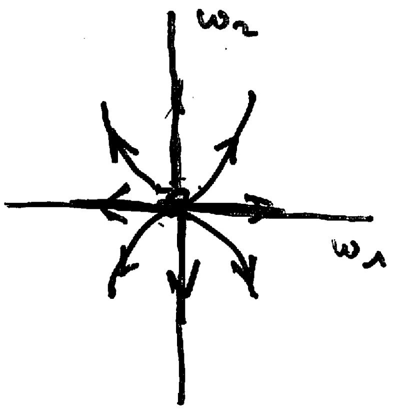
(3)


(4)

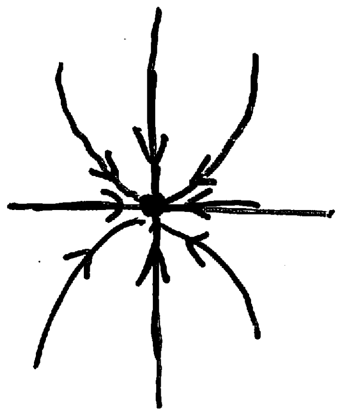
λ_1, λ_2 reell $\qquad \lambda_1 \neq \lambda_2 \qquad \lambda_i \neq 0$

$$w' = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} w \qquad \begin{array}{l} w_1 = c_1 e^{\lambda_1 t} \\ w_2 = c_2 e^{\lambda_2 t} \end{array}$$

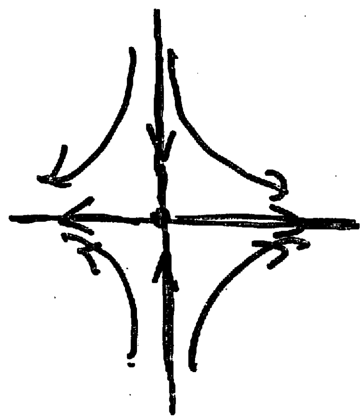
$\lambda_2 > \lambda_1 > 0 \qquad \lambda_2 < \lambda_1 < 0 \qquad \lambda_2 < 0 < \lambda_1$



(1)



(2)

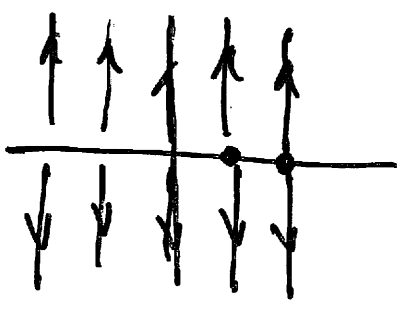


Sattelpunkt.

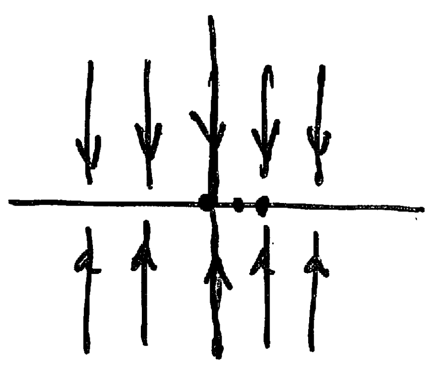
(5)

Ein $\lambda = 0$

$\lambda_1 = 0 \quad \lambda_2 > 0 \qquad \lambda_1 = 0 \quad \lambda_2 < 0$



(4)



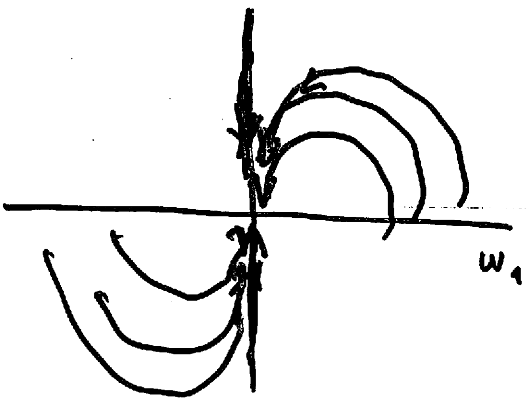
(6)

Fall 2

$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ geometrische Vielfachheit 1

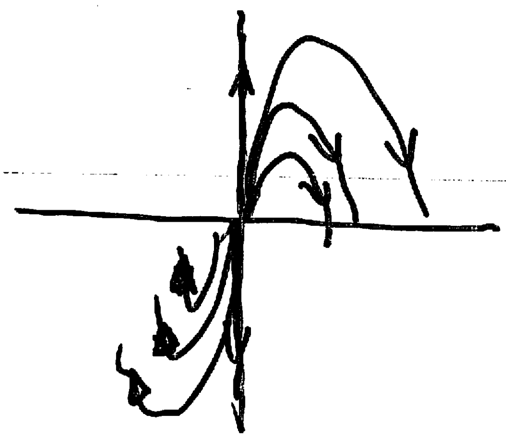
$$w_1 = (w_{10} + w_{20} t) e^{\lambda t}$$
$$w_2 = w_{20} e^{\lambda t}$$
$$w' = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} w$$

$\lambda < 0$



(7)

$\lambda > 0$

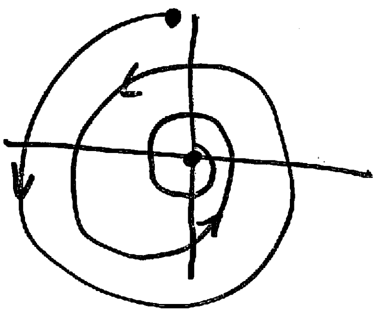


(7)

Fall 1 (b)

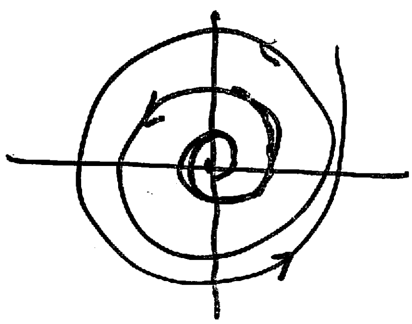
$$\lambda_1 = \alpha + i\beta$$
$$\lambda_2 = \alpha - i\beta$$

$\alpha < 0 \quad \beta < 0$



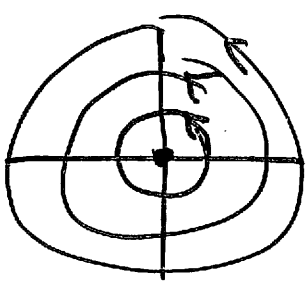
(8)

$\alpha > 0 \quad \beta < 0$



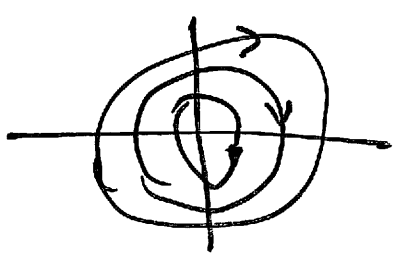
(8)

$\beta < 0 \quad \alpha = 0$



(10)

$\beta > 0 \quad \alpha = 0$



(10)