Vorlesung DGL I 30.11.2007

TAUBERT

WIEDERHOLUNG

Bestimmung allgemeine Lösung von

$$y'(t) = A(t)y(t) + h(t)$$

Möglicher Weg:

1. Finde allgemeine Lösung y_h von

$$y' = A(t)y$$

2. Finde partikuläre Lösung y_p von

$$y' = A(t)y + h(t)$$

Allgemeine Lösung ist

$$\rightsquigarrow \quad y = y_p + y_h$$

A. Bestimmung allgemeine Lösung y_h von $y' = A(t)y$

Hier: Bestimme Fundamentalmatrix oder Fundamentalsystem $Y(t)$

$\rightsquigarrow$ $y_h = Y(t)c$ $c \in \mathbb{R}^n$ allgemeine Lösung

Bestimmung der Fundamentalmatrix ?

1. Im Prinzip

mit den Basisvektoren $(v^1, v^2, \dots, v^n)$ löse

$$\frac{d}{dt} y^k(t) = A(t)\, y^k(t)$$
$$y^k(t_0) = v^k$$

$$\rightsquigarrow \quad Y(t) = (y^1, y^2, \dots, y^n)$$

2. Mit bekannten Lösungen und Reduktion des Systems

3. Nutze spezielle Form von $A(t)$ aus

z. B. $\quad y' = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} y$ oder allgemeiner

$$A(t) = A \quad \text{konstante Matrix}$$

(in dieser Vorlesung)

B. Bestimmung einer partikulären Lösung y_p

1. Fundamentalmatrix $Y(t)$ sei bekannt.
Ansatz Variation der Konstanten

$$y_p = Y(t)\underline{\underline{c(t)}}$$

liefert

$$y_p(t) = \int_{t_0}^{t} Y(t)Y^{-1}(s)h(s)ds$$

2. Spezielle Ansätze (Potenzreihen), physikalische Hintergründe usw. können auch eine spezielle Lösung liefern

→ Allgemeine Lösung mit Fundamentalmatrix ←

$$y(t) = Y(t)c_0 + \int_{t_0}^{t} Y(t)Y^{-1}(s)h(s)\,ds$$

Beachte: Fundamentalsystem existiert immer
Konkrete Bestimmung kann schwierig sein!!!

Fundamentalsysteme
für lineare homogene Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten

$$y' = Ay \qquad A \in \mathbb{R}^{n\times n}$$

(Für $n = 1$ führte $y(t) = ce^{at}$ zur Lösung)

Allgemein: Lösungsansatz

$$y(t) = v e^{\lambda t} \qquad v \in \mathbb{R}^n$$

$$\rightsquigarrow \quad \underline{\lambda} v e^{\lambda t} = y'(t) = Ay(t) = Ave^{\lambda t}$$

$$\Longrightarrow \quad Av = \lambda v$$

Eigenwertaufgabe

<u>Probleme falls</u>:

- Eigenwerte aus $\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$ d.h. echt komplex
- Dimension der Eigenräume $\neq$ Vielfachheit der Eigenwerte (geometrische Vielfachheit) $\neq$ (algebraische Vielfachheit)

deshalb drei Fälle:

→ 1. A diagonalisierbar mit reellen Eigenwerten
→ 2. A diagonalisierbar mit komplexen Eigenwerten
→ 3. A nicht diagonalisierbar

$$y' = Ay \implies \text{Ansatz } y(t) = v e^{\lambda t} \implies Av = \lambda v$$

Fall 1

Alle Eigenwerte (Nullstellen von $\det(A - \lambda E) = 0$) $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ von A sind reell und es existiert eine Basis aus (reellen) Eigenvektoren $v^1, v^2, \dots, v^n$.
Dann ist eine Fundamentalmatrix $Y(t)$ gegeben durch

$$Y(t) = \left(e^{\lambda_1 t} v^1, e^{\lambda_2 t} v^2, \dots, e^{\lambda_n t} v^n\right)$$

Die allgemeine Lösung von $y' = Ay$ ist dann

$$y_h(t) = \sum_{k=1}^{n} c_k e^{\lambda_k t} v^k, \qquad c_k \in \mathbb{R}.$$

Beispiel

$$y' = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} y \qquad a, b \in \mathbb{R}$$

Eigenwerte $\quad \det(A - \lambda E) = \det\begin{pmatrix} a-\lambda & 0 \\ 0 & b-\lambda \end{pmatrix} = (a-\lambda)(b-\lambda) = 0$

$$\rightsquigarrow \lambda_1 = a \qquad \lambda_2 = b$$

Eigenvektoren

$$Av^1 = \lambda_1 v^1 \implies (\text{g.R.}) \quad v^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$Av^2 = \lambda_2 v^2 \implies (\text{g.R.}) \quad v^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$Y(t) = \left(e^{\lambda_1 t} v^1, e^{\lambda_2 t} v^2\right) \qquad y_h(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} v^1 + c_2 e^{\lambda_2 t} v^2$$

$$y' = Ay \implies \text{Ansatz } y(t) = v e^{\lambda t} \implies Av = \lambda v$$

Fall 2

A ist diagonalisierbar, d.h. die Matrix A besitzt ein vollständiges System* v^k von Eigenvektoren (aus $\underline{\mathbb{C}}^n$) zu den Eigenwerten λ^k, $k=1,2,\dots,n$

$$\leadsto \quad Y(t) = \left(\dots\dots, e^{\lambda_k t} \underline{v}^k, \dots\dots \right)$$

komplexes Fundamentalsystem

Problem: Wir suchen reellwertige Lösungen!!!

Beispiel

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

Eigenwerte: $\det \begin{pmatrix} 1-\lambda & -1 \\ 4 & 1-\lambda \end{pmatrix} = 0 \iff (1-\lambda)^2 + 4 = 0$

$$\lambda_1 = 1+2i \qquad \lambda_2 = 1-2i$$

Eigenvektoren:

$Av^1 = \lambda_1 v^1 \iff \begin{pmatrix} -2i & -1 \\ 4 & -2i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1^1 \\ v_2^1 \end{pmatrix} = 0 \implies v^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2i \end{pmatrix}$

$\implies v^2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2i \end{pmatrix}$

$Av^2 = \lambda_2 v^2$

Was nun?

* z.B. A normal, A symmetrisch usw.

2. Fall $\quad y' = Ay \quad$ A diagonalisierbar mit komplexen Eigenwerten

$$y' = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} y$$

Frage: Ist es möglich, ein reelles Fundamentalsystem anzugeben?

Lineare Algebra:

Ist $\lambda \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$ ein komplexer Eigenwert von A, so auch $\bar{\lambda}$ (konjugiert komplex)

Entsprechend ist v Eigenvektor so auch $\bar{v}$.

Also: Nichtreelle Eigenwerte und Vektoren treten stets paarweise auf

Ersetze
$$y^1(t) = e^{\lambda t} v$$
$$y^2(t) = e^{\bar{\lambda} t} \bar{v}$$
durch
$$\tilde{y}^1(t) = \mathrm{Re}\,(e^{\lambda t} v) = \frac{1}{2}\left(e^{\lambda t} v + e^{\bar{\lambda} t} \bar{v}\right)$$
$$\tilde{y}^2(t) = \mathrm{Im}\,(e^{\lambda t} v) = \frac{1}{2i}\left(e^{\lambda t} v - e^{\bar{\lambda} t} \bar{v}\right)$$

Im Beispiel

$$y^1(t) = e^{\lambda t} v = e^{(1+2i)t}\begin{pmatrix} 1 \\ -2i \end{pmatrix} \longrightarrow e^{t}\begin{pmatrix} \cos 2t \\ 2\sin 2t \end{pmatrix} = \tilde{y}_1(t)$$

$$y^2(t) = e^{\bar{\lambda} t} \bar{v} = e^{(1-2i)}\begin{pmatrix} 1 \\ 2i \end{pmatrix} \longrightarrow e^{t}\begin{pmatrix} \sin 2t \\ -2\cos 2t \end{pmatrix} = \tilde{y}_2(t)$$

$$\underset{\text{reell}}{Y}(t) = \left(e^{t}\begin{pmatrix} \cos 2t \\ 2\sin 2t \end{pmatrix}, e^{t}\begin{pmatrix} \sin 2t \\ -2\cos 2t \end{pmatrix} \right)$$

Allgemein: Verfahre entsprechend dem Beispiel

$y' = Ay$ $\qquad$ $Av = \lambda v$ $\qquad$ A diagonalisierbar

Fall 2 (allgemein)

Für jedes (echt) komplexes Paar von Eigenwerten $\lambda, \bar\lambda$ im komplexen Fundamentalsystem

$$Y(t) = (\cdots\cdots, e^{\lambda t}v, e^{\bar\lambda t}\bar v, \cdots\cdots)$$

$$\Updownarrow$$

$$Y(t) = (\cdots\cdots, y^1, y^2, \cdots\cdots)$$

mache den Übergang

$$y^1 \longrightarrow \mathrm{Re}\, e^{\lambda t} v \quad \cdots\cdots \quad = \mathrm{Re}\, e^{\bar\lambda t}\bar v$$

$$y^2 \longrightarrow \mathrm{Im}\, e^{\lambda t} v \quad \cdots\cdots \quad = \mathrm{Im}\, e^{\bar\lambda t}\bar v$$

Ein reelles Fundamentalsystem ist dann

$$Y(t) = (\cdots\cdots, \mathrm{Re}\, e^{\lambda t}v, \mathrm{Im}\, e^{\lambda t}v, \cdots\cdots)$$

und

$$y_h = \cdots\cdots + c_\lambda^1 \mathrm{Re}\, e^{\lambda t} v + c_\lambda^2 \mathrm{Im}\, e^{\lambda t} v + \cdots$$

$$y' = Ay \implies \text{Ansatz } y(t) = v e^{\lambda t} \implies Av = \lambda v$$

Fall 3 A nicht diagonalisierbar

Problem:

A besitzt kein vollständiges System von Eigenvektoren

Beispiel $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$! $Ax = 0$ Rang $A = 1$!

Allgemein "benötigt" (für Theorie) man die Jordan'sche Normalform der Matrix A

$$J = S^{-1} A S$$

$$J = \begin{pmatrix} J_1 & & \\ & \ddots & \\ & & J_m \end{pmatrix}$$

wobei J_i ein Jordan-Block bezeichnet, d.h.

$$J_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & 0 \\ \vdots & \ddots & 1 \\ \cdots & & \lambda_i \end{pmatrix}$$

Betrachte

$$y' = Ay \quad \text{und} \quad S \quad \text{mit} \quad S^{-1} A S = J$$

$y' = Ay \longrightarrow Av = \lambda v$

A nicht diagonalisierbar

$y' = Ay$ und S mit $S^{-1}AS = J$ Jordan-Normalform

$$y' = Ay$$

$$\rightsquigarrow \quad S^{-1}y' = S^{-1}ASS^{-1}y$$

$$(S^{-1}y)' = J\,\underbrace{S^{-1}y}$$

$$z' = Jz$$

Die DGL wird dadurch in Blöcke entkoppelt

Beispiel

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}' = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 2 \end{array}\right) \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}, \quad z_3' = 2 z_3$$

Es genügt den Fall

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_r \end{pmatrix}$$

zu behandeln

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_r \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 \\ 0 & & & \lambda_1 \end{pmatrix}}_{r \times r} \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_r \end{pmatrix}$$

führt zum nicht entkoppelten System

$$z_1' = \lambda_1 z_1 + z_2$$
$$z_2' = \lambda_1 z_2 + z_3$$

$$z_r' = \lambda_1 z_r$$

Ein Fundamentalsystem kann leicht angegeben werden

$$e^{\lambda_1 t}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e^{\lambda_1 t}\begin{pmatrix} t/1! \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \cdots\cdots, \quad e^{\lambda_1 t}\begin{pmatrix} t^{r-1}/(r-1)! \\ \vdots \\ t/1! \\ 1 \end{pmatrix}$$

Lösung mit

$$z(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad z(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad z(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

Beachte z.B.

$$z_1(t) = t e^{\lambda_1 t}$$
$$z_1'(t) = \lambda_1 t e^{\lambda_1 t} + e^{\lambda_1 t}$$
$$= \lambda_1 z_1(t) + z_2(t) \quad (!!!$$

Rücktransformation ???

Betrachte erneut

$$J = S^{-1} A S$$

Transformationsmatrix S besteht aus Eigen- und Hauptvektoren

$$S = \left(\underline{v}^{11}, \ldots, \underline{v}^{1r_1} \,\middle|\, \underline{v}^{21}, \ldots, \underline{v}^{2r_2} \,\middle|\, \cdots \,\middle|\, \underline{v}^{m1}, \ldots, \underline{v}^{mr_m} \right)$$

v^{j1} : Eigenvektor zum Eigenwert λ_j, $j = 1, 2, \ldots, m$

v^{jk} : Hauptvektor der Stufe $(k-1)$, $k = 2, \ldots, r_j$

$$(A - \lambda_j E_n) \underline{v}_{jk} = \underline{v}_{j(k-1)} \quad , k = 2, \ldots, r_j$$

Aus

$$z(t) = S^{-1} y(t)$$

ergibt sich

$$y(t) = S z(t) \;!!!$$

d.h. Eigenvektoren und Hauptvektoren müssen ermittelt werden !!!

Beispiel

$$y' = Ay = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} y$$

Eigenwerte $\lambda_{1,2} = 2$ (zweifach)

Eigenvektor zu $(A - 2E) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow v^{11} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(Rang von $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 1 \Rightarrow$ kein weiterer Eigenvektor)

Hauptvektor

$$(A - \lambda E) v^{12} = v^{11} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} v^{12} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow v^{12} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad J = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad \lambda_1 = 2$$

$$\begin{pmatrix} z_1' \\ z_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$$

$$z^1 = e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad z^2 = e^{2t} \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$y^1 = S z^1 = e^{2t} v^{11} = e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \overset{!}{=} e^{2t} v^{11}$$

$$y^2 = S z^2 = e^{2t} v^{12} = e^{2t} \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix} \overset{!}{=} e^{2t} (t v^{11} + v^{12})$$

Allgemein ergibt sich für jeden Jordan-Block als Rücktransformation

$$
\begin{aligned}
y^{11}(t) &= e^{\lambda_1 t} v^{11} \\
y^{12}(t) &= e^{\lambda_1 t}\left(\frac{t}{1!} v^{11} + v^{12}\right) \\
&\vdots \\
y^{1r}(t) &= e^{\lambda_1 t}\left(\frac{t^{r-1}}{(r-1)!} v^{11} + \cdots + \frac{t}{1!} v^{1,r-1} + v^{1r}\right)
\end{aligned}
$$

Also:
Allgemeines Vorgehen bei nicht diagonalisierbaren Matrizen A

1) Bestimmung der Eigenwerte, Eigen- und Hauptvektoren
2) Berechnung der Lösungen nach obiger Formel
3) Zusammenfassung der Einzelmatrizen zu einer Fundamentalmatrix

Beispiel:

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \\ y_3' \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 & 1 \\ 0 & -1-\lambda & -1 \\ 0 & 4 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^3 \stackrel{!}{=} 0$$

$\lambda_1 = 1$ 3-facher EW algebr. Vielf $= 3$

EV:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \quad v^1 = \begin{pmatrix} 16 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$(A - 1 \cdot E)\, v^1 = 0$

nur 1 EV

geometrische Vielf $= 1$

HV.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -2 & 1 & 16 \\ 0 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 2 & 16 \\ 0 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad v^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 8 \end{pmatrix}$$

1. HV

$(A - 1E)\, v^2 = v^1$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & -4 \\ 0 & 4 & 2 & 8 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & -2 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad v^3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

2. HV

FS $\quad \underline{Y} = (y^1, y^2, y^3)$

$$y^1 = e^t v^1 = e^t \begin{pmatrix} 16 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$y^2 = e^t (t v^1 + v^2) = e^t \begin{pmatrix} 16t \\ -4 \\ 8 \end{pmatrix}$$

allg Lsg

$$y^3 = e^t \left(\frac{t^2}{2!} v^1 + \frac{t}{1!} v^2 + v^3 \right) = e^t \begin{pmatrix} 8t^2 \\ -4t+1 \\ 8t+2 \end{pmatrix}$$

$y(t) = Y \cdot \vec{c}$

Beispiel

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \\ y_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

$$p_\lambda(A) = \det(A-\lambda E) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^3 \overset{!}{=} 0$$

$\lambda = 1$ 3fach algebraische Vielfachheit $= 3$

EV: $\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$ z.B. $v^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $v^2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$(A - 1E)v = 0$ geometrische Vielfachheit $= 2$

HV: nicht EV

$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$ $v^3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

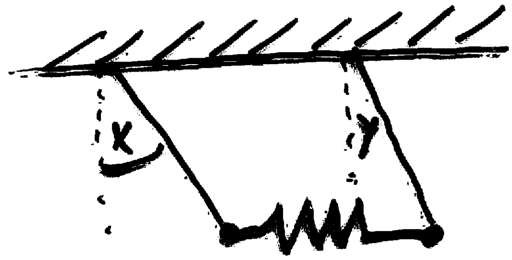
$$J = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \qquad \underline{S} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$y^1(t) = e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad y^2(t) = e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad y^3(t) = e^t (t v^2 + v^3)$$

$$= e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ t \end{pmatrix}$$

Beispiel

<u>gekoppeltes Pendel</u>



$$m\ddot{x} = -\frac{mg}{l}x - k(x-y)$$

$$m\ddot{y} = -\frac{mg}{l}y - k(y-x)$$

Setze $\quad p = \dot{x} \quad \rho = \dot{y} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}} \quad k_0 = \frac{k}{m}$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ p \\ \rho \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -(\omega_0^2+k_0) & k_0 & 0 & 0 \\ k_0 & -(\omega_0^2+k_0) & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ p \\ \rho \end{pmatrix}$$

EW: $\quad \lambda_{1,2} = \underline{\pm i\omega_0} \qquad \lambda_{3,4} = \pm i\sqrt{\omega_0^2+2k_0} =: \underline{\pm i\omega}$

EV: $\quad v^1 = \underline{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ i\omega_0 \\ i\omega_0 \end{pmatrix}}, \quad v^2 = \underline{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -i\omega_0 \\ -i\omega_0 \end{pmatrix}}, \quad v^3 = \underline{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ i\omega \\ -i\omega \end{pmatrix}} \quad v^4 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -i\omega \\ i\omega \end{pmatrix}$

reelles FS

$$y^1(t) = \mathrm{Re}(e^{i\omega_0 t}v^1) = \begin{pmatrix} \cos\omega_0 t \\ \cos\omega_0 t \\ -\omega_0 \sin\omega_0 t \\ -\omega_0\sin\omega_0 t \end{pmatrix} \qquad y^3(t) = \mathrm{Re}(e^{i\omega t}v^3) = \begin{pmatrix} \cos\omega t \\ -\cos\omega t \\ -\omega\sin\omega t \\ \omega\sin\omega t \end{pmatrix}$$

$$y^2(t) = \mathrm{Im}(e^{i\omega_0 t}v^1) = \begin{pmatrix} \sin\omega_0 t \\ \sin\omega_0 t \\ \omega_0\cos\omega_0 t \\ \omega_0\cos\omega_0 t \end{pmatrix} \qquad y^4(t) = \mathrm{Im}(e^{i\omega t}v^3) = \begin{pmatrix} \sin\omega t \\ -\sin\omega t \\ \omega\cos\omega t \\ -\omega\cos\omega t \end{pmatrix}$$