DIFFERENTIALGLEICHUNGEN WS 07/08
(TAUBERT)
16.11.07

Gegeben sei eine Anfangswertaufgabe

$$y' = f(t,y) \;,\; y(t_0) = y_0$$

FRAGEN:

I. Existiert eine Lösung?
insbesondere
„Wie groß ist der Definitionsbereich"

II. Ist die Lösung eindeutig bestimmt?
insbesondere
„Welche Bedingungen sind dafür an f zu stellen"

III. Abhängigkeit der Lösungen von Daten:
insbesondere
„Wie verändern sich die Lösungen bei

$$t_0 \longrightarrow t_0'$$
$$y_0 \longrightarrow y_0'$$
$$f(t,y) \longrightarrow g(t,y)$$

$$y' = f(t,y), \quad y(t_0) = y_0$$

I. Existenz von Lösungen

Existenzsatz (Peano - 1890)

Es sei $f(t,y)$ stetig auf

$$Q = \{(t,y) \in \mathbb{R}^{1+n} \,/\, |t-t_0| \le a \quad \|y-y_0\| \le b\}$$

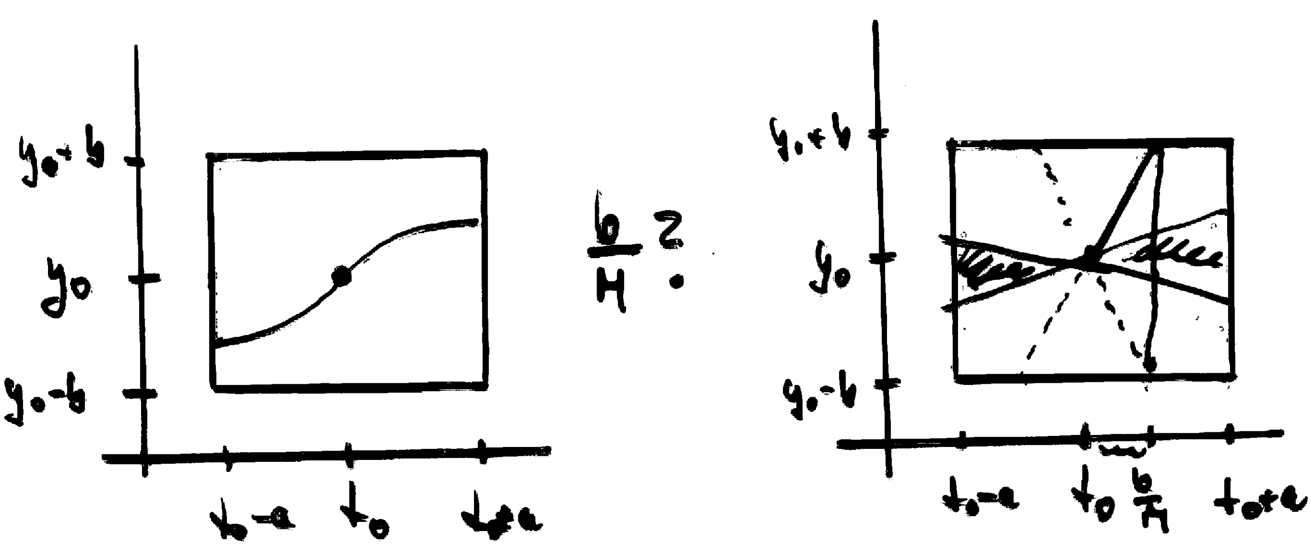
$$\|f(t,y)\| \le M \quad \forall\, (t,y) \in Q$$

Dann hat die AWA

$$y'(t) = f(t,y(t)), \quad y(t_0) = y_0$$

eine Lösung, die mindestens in

$[t_0-\varepsilon, t_0+\varepsilon]$, $\varepsilon = \min(a, \frac{b}{M})$ definiert ist



Beweis (Idee!)

Peano

"Approximation der Lösungen durch Polygonzüge"

$$y' = f(t,y), \quad y(t_0) = y_0$$

$$\Updownarrow$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{y(t+h)-y(t)}{h} \cong f(t,y(t))$$

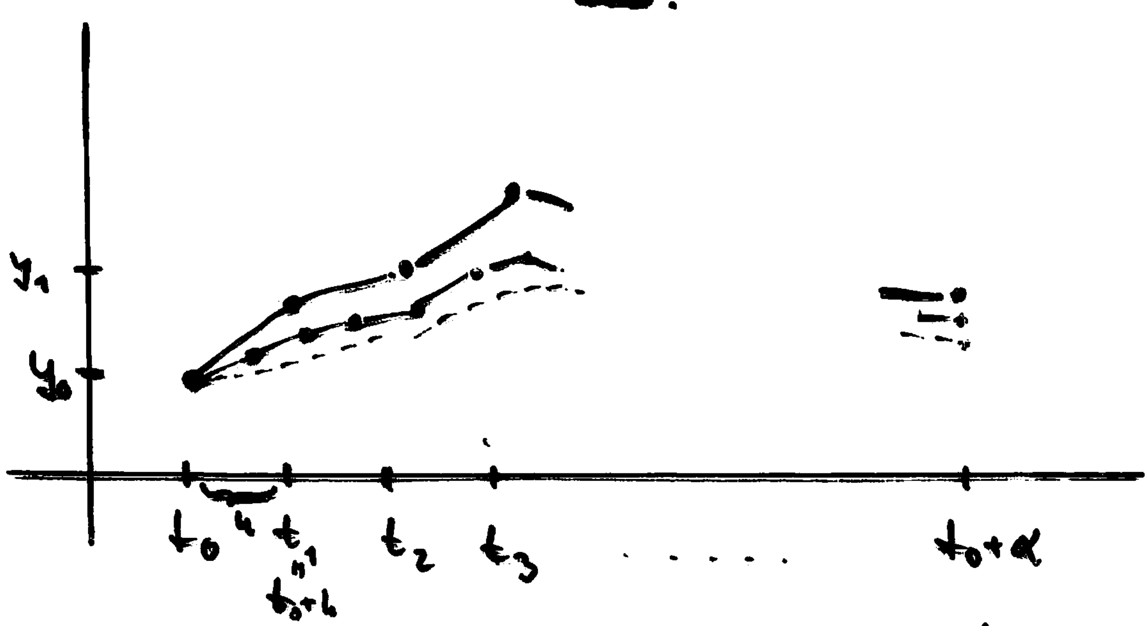
$y(t+h) \cong y(t) + h\,f(t,y(t))$ bzw. $y_{n+1} = y_n + h\,f(t_n,y_n)$

$n = 0,1,2 \dots$

$$y_1 = y_0 + h\,f(t_0,y_0)$$

$$y_2 = y_1 + h\,f(t_1,y_1)$$

usw.



$h \longrightarrow$ Polygonzug $y^h(\cdot)$

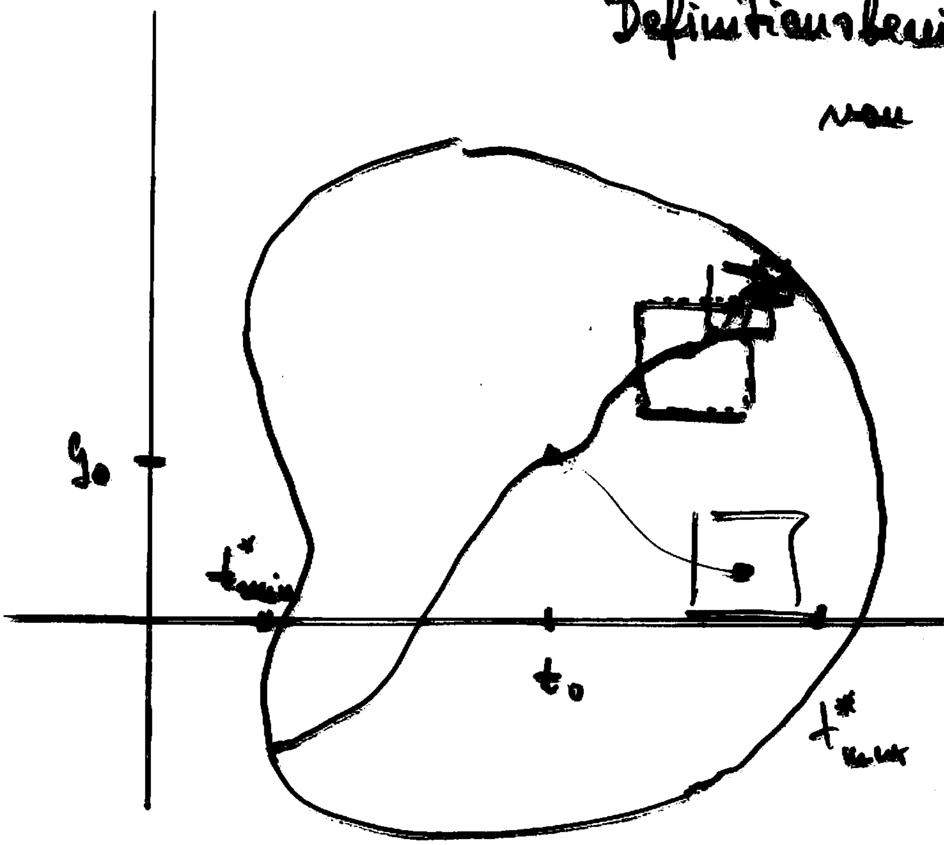
$$y^{h'}(\cdot) \xrightarrow[h'\to 0]{\text{glm}} y(\cdot) \text{ Lösung}$$

"Wie groß ist der Definitionsbereich?"

$$y' = f(t,y) \quad , \; y(t_0) = y_0$$

$$f : D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

Definitionsbereich D (offen) von f



Es gibt ein maximales Existenzintervall

$$-\infty \leq t_{min} < t < t_{max} \leq +\infty$$

und

$\underbrace{(t, y(t))}_{\in D}$ kommt für $t \to t_{min}$, $t \to t_{max}$ ∂D beliebig nahe

$$y' = f(t,y) \quad , \quad y(t_0) = y_0$$

II. Eindeutigkeit

Beispiel

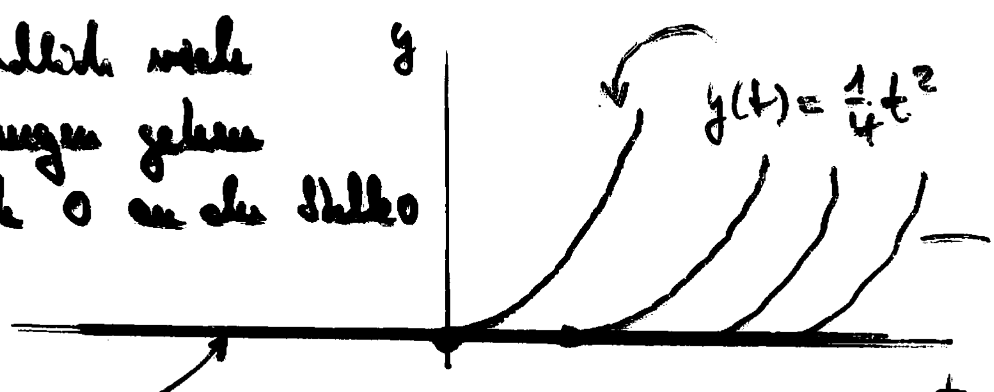
$$y' = \sqrt{|y|} \quad , \quad y(0) = 0$$

hat unendlich viele Lösungen

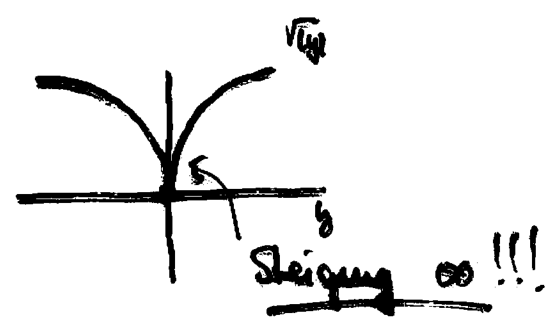
$y(t) \equiv 0$ ist Lösung für alle t

$y(t) = \frac{1}{4}(t-\alpha)^2$, $\alpha \geq 0$ ist Lösung für alle $t \geq \alpha$

$\Rightarrow$ unendlich viele Lösungen gehen durch 0 an der Stelle 0



Problem: $\sqrt{|y|}$



Existenz und Eindeutigkeitssatz
(Picard-Lindelöf, 1894)

Es sei $f(t,y)$ stetig auf

$$Q = \{(t,y) \in \mathbb{R}^{1+n} \,/\, |t-t_0| \leq a \quad \|y-y_0\| \leq b\}$$

$$\|f(t,y)\| \leq M \quad \forall\, (t,y) \in Q$$

$$\|f(t,\tilde{y}) - f(t,y)\| \leq L\|\tilde{y}-y\| \quad \forall (t,\tilde{y}), (t,y) \in Q$$

Dann hat die AWA

$$y'(t) = f(t,y(t)), \quad y(t_0) = y_0$$

eine eindeutige Lösung, die mindestens in

$[t_0-\varepsilon, t_0+\varepsilon]$, $\varepsilon = \min\left(a, \frac{b}{M}\right)$ definiert ist.

Beweisidee)

Picard-Lindelöf

"Verfahren der sukzessiven Approximationen"

$$y' = f(t,y)\;,\; y(t_0) = y_0$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$\underline{y(t)} = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, \underline{y(s)})\,ds$$

Verfahren:

$$y^0(t) \equiv y_0$$

$$y^{n+1}(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, y^n(s))\,ds \qquad n = 0,1,\dots$$

Hintergrund:

Fixpunktaufgabe auf $D \subset C[t_0-\varepsilon, t_0+\varepsilon]$

$$y = Ty$$

$$(Ty)(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, y(s))\,ds$$

Banach:

$$y^{n+1} = Ty^n$$

$$y^n \xrightarrow[\text{glm}]{} y(\cdot) \text{ Lösung!}$$

Beispiel:

$$y' = y, \qquad y(0) = 1$$

$f(t,y) := y$

$$|f(t,\tilde{y}) - f(t,y)| = |\tilde{y} - y| \le L|\tilde{y} - y|$$

$L = 1$

$$y^0(t) \equiv 1$$

$$y^{n+1}(t) = 1 + \int_0^t y^n(s)\,ds \qquad n = 0,1,2,\dots$$

$$y^1(t) = 1 + \int_0^t 1\,ds = 1 + t$$

$$y^2(t) = 1 + \int_0^t (1+s)\,ds = 1 + t + \frac{t^2}{2}$$

$\vdots$

$$y^n(t) = \qquad\qquad = 1 + t + \frac{t^2}{2!} + \dots + \frac{t^n}{n!}$$

$$y^n(t) \xrightarrow[\text{glm.}]{n \to \infty} e^t \quad (\text{auf jedem Intervall } [0-\alpha, 0+\alpha])$$

Verallgemeinerungen und Anwendungen des Satzes von Picard-Lindelöf

Verallgemeinerung

$$y' = f(t,y) \quad , \quad y(t_0) = y_0$$

$$f : [a,b] \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

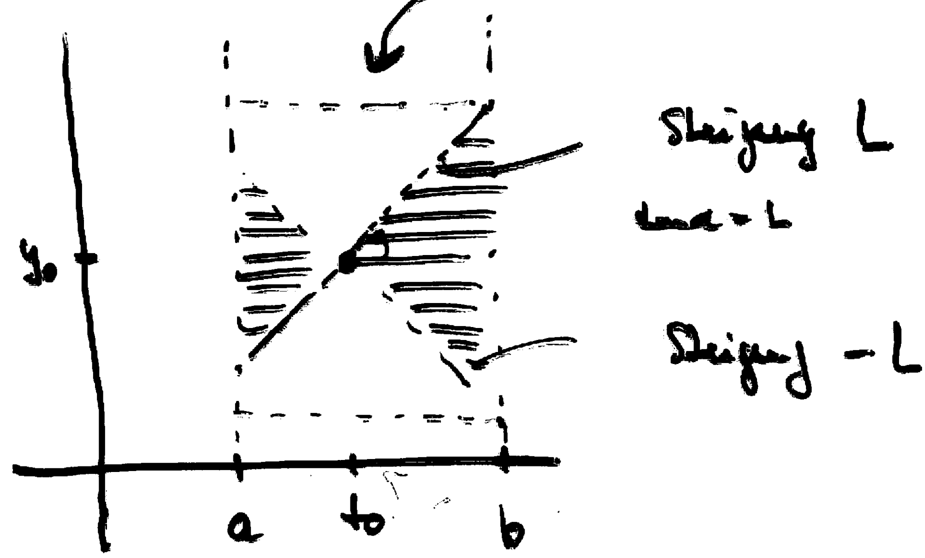
$$f \text{ stetig}$$

$$\| f(t,\tilde{y}) - f(t,y) \| \leq L \| \tilde{y} - y \| \quad \forall (t,\tilde{y}), (t,y)$$

Dann existiert eine Lösung auf ganz $[a,b]$!!!

Beweis schwierig ? NEIN !!!

Lösungen können höchstens die Steigung L haben !!!
Behandle nun die Polygonzüge im Quader Q



Anwendung

System linearer inhomogener Anfangswertaufgabe (explizit)

$$y'(t) = A(t)\,y(t) + h(t)$$
$$y(t_0) = y_0$$

$A(t)$ $n \times n$ Matrix

$$A : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^{(n \times n)} \quad \text{stetig}$$
$$h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^{n} \quad \text{stetig}$$

Wähle $t \in [a,b]$, $t_0 \in [a,b]$

$$\longrightarrow f(t,y) := A(t)\,y + h(t)$$

$$\| f(t,y_1) - f(t,y_2) \| = \| A(t)y_1 + \cancel{h(t)} - A(t)y_2 - \cancel{h(t)} \|$$
$$= \| A(t)(y_1 - y_2) \|$$
$$\leq \| A(t) \| \, \| y_1 - y_2 \|$$

$$L := \max_{t \in [a,b]} \| A(t) \| \qquad \leq L \| y_1 - y_2 \|$$

$\Longrightarrow$ Lösung eindeutig existiert auf ganz $\mathbb{R}$

<u>Definition</u>

Eine stetige Funktion $f: D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ heißt Lipschitzstetig, wenn es eine Konstante $L_g \geq 0$ gibt mit

$$\| f(t, y_1) - f(t, y_2) \| \leq L_g \| y_1 - y_2 \|$$

für alle $(t, y_1), (t, y_2) \in D$.

1. <u>Beispiele</u> für Lipschitzstetige Funktionen:

- $f(t, y) = |y|$

$$|f(t, y_1) - f(t, y_2)| = ||y_1| - |y_2|| \leq |y_1 - y_2| = 1 \cdot |y_1 - y_2|$$

- $f(t, y) = Ay$ A unabhängig, reell

$$\| f(t, y_1) - f(t, y_2) \| = \| Ay_1 - Ay_2 \| = \| A(y_1 - y_2) \| \leq \|A\| \| y_1 - y_2 \|$$

- $f: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ f stetig differenzierbar

$$f(t, y_1) - f(t, y_2) \overset{!}{=} f_y(t, \xi)(y_1 - y_2)$$

Falls $\max\limits_{(t,u)} |f_y(t, u)| \leq L$

$$\Rightarrow |f(t, y_1) - f(t, y_2)| \leq L |y_1 - y_2|$$

Beachte: Für kompakte Teilmengen $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ist f stets Lipschitzstetig

- $F : Q \subset \mathbb{R} \times \underline{\underline{\mathbb{R}^n}} \longrightarrow \underline{\underline{\mathbb{R}^n}}$

F stetig differenzierbar

$$\Longrightarrow \quad F = (f_1, f_2, \cdots, f_n)$$

$$f_i : Q \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

f_i stetig differenzierbar

$$f_i(t, \tilde{y}) - f_i(t, y) = \frac{\partial f_i}{\partial y}(y + \theta(\tilde{y} - y))(\tilde{y} - y)$$

$$L_i := \sup_{(t,y) \in Q} \sum_{j=1}^{n} \left| \frac{\partial f_i}{\partial y_j}(t, y) \right|$$

$$\Longrightarrow \quad |f_i(t, \tilde{y}) - f_i(t, y)| \leq L_i \|\tilde{y} - y\|_\infty$$

$$\Longrightarrow \quad \|F(t, \tilde{y}) - F(t, y)\|_\infty \leq \underbrace{\max_i (L_i)} \|\tilde{y} - y\|_\infty$$

Bisher:

Bestimmung von Lipschitzkonstanten $\underline{L}$ mit

$$\| f(t,\tilde{y}) - f(t,y) \| \leq L \| \tilde{y} - y \|$$

2. Eine nicht Lipschitzstetige Funktion ist

$$f(t,y) = \sqrt{y} \qquad y \in (0,\infty) \qquad (\text{stetig}).$$

$\nexists$ L mit

$$| \sqrt{y_1} - \sqrt{y_2} | \leq L | y_1 - y_2 | \quad !$$

Angenommen es existiert L

$$| \sqrt{y_1} - \sqrt{y_2} | \overset{!}{\leq} \underline{L} | y_1 - y_2 | = L | (\sqrt{y_1})^2 - (\sqrt{y_2})^2 |$$

$$= L | \sqrt{y_1} - \sqrt{y_2} | | \sqrt{y_1} + \sqrt{y_2} |$$

$$\Longrightarrow \quad 1 \leq L | \sqrt{y_1} + \sqrt{y_2} |$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{1}{| \sqrt{y_1} + \sqrt{y_2} |} \leq L \quad \Longrightarrow$$ es kann kein L auf $(0,\infty)$ geben!

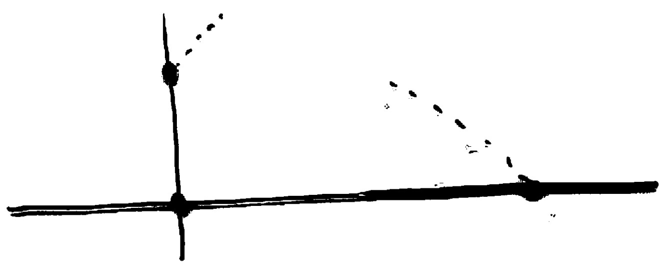
klein wählen!

Anwendung des Satzes:

Beh.: Die Lösung von

$$y' = \sin(ty), \quad y(0) = 1$$

ist positiv



Beweis

$$\sin(ty_1) - \sin(ty_2) = t\cos(tu)(y_1 - y_2)$$

und erfüllt auf jedem Intervall $[a,b]$ eine Lipschitzbedingung ✓

Es sei t^* das erste t mit $y(t^*) = 0$

Durch $y(t^*) = 0$ gibt es aber nur eine Lösung, nämlich $y \equiv 0$. Widerspruch!!!

Betrachte

$$y' = f(t,y) \quad , \quad y(t_0) = y_0$$

f erfülle die Bedingungen von Picard-Lindelöf

III Abhängigkeit der Lösungen von Daten

Betrachte

1. $y'(t) = f(t,y(t)) \,,\, y(t_0) = y_0 \xrightarrow[\text{Lösung}]{\text{Eindeutige}} y(t,y_0)$

2. $y'(t) = f(t,y(t)) \,,\, y(t_0) = \tilde{y}_0 \xrightarrow[\text{Lösung}]{\text{Eindeutige}} y(t,\tilde{y}_0)$

Wie unterscheiden sich $y(t,y_0)$ und $y(t,\tilde{y}_0)$?

Beispiel $(n=1)$

$$y' = Ly \;,\; y(0) = y_0 \implies y(t,y_0) = y_0 e^{Lt}$$

$$y' = Ly \;,\; y(0) = \tilde{y}_0 \implies y(t,\tilde{y}_0) = \tilde{y}_0 e^{Lt}$$

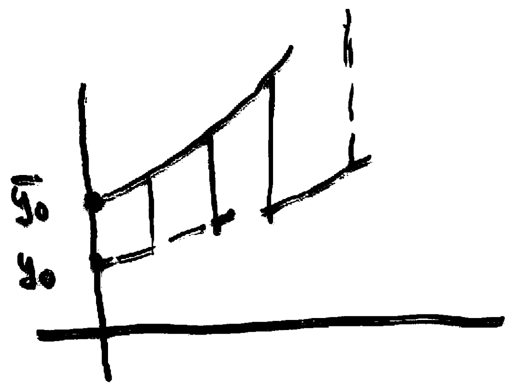
$$\implies$$

$$|y(t,y_0) - y(t,\tilde{y}_0)| = |y_0 e^{Lt} - \tilde{y}_0 e^{Lt}| \leq |y_0 - \tilde{y}_0| \, e^{Lt}$$

$$y' = Ly$$

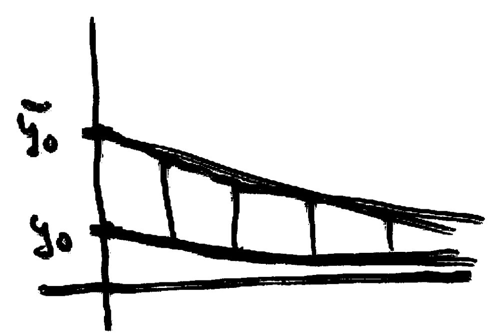
$y(0) = y_0$
$y(0) = \tilde{y}_0$ $\Longrightarrow$ $|y(t, y_0) - y(t, \tilde{y}_0)| \leq |y_0 - \tilde{y}_0| e^{Lt}$

1. Fall $L > 0$



laufen auseinander

2. Fall $L < 0$



laufen zusammen

In beiden Fällen ($L > 0$ bzw $L < 0$)

$$\underline{|f(y_1) - f(y_2)| = |L| |y_1 - y_2|}$$

Lipschitzkonstante ist $\underline{\underline{|L|}}$

Allgemeiner:

Stetige Abhängigkeit von den Anfangswerten

$$\underline{y' = f(t,y)}$$

$$y(t_0) = \underline{y_0} \quad \text{bzw.} \quad y(t_0) = \underline{\tilde{y}_0}$$

Sei $f(t,y)$ wie in Picard-Lindelöf

$$\Longrightarrow$$

$$\| y(t,y_0) - y(t,\tilde{y}_0) \| \leq e^{L|t-t_0|} \underline{\| y_0 - \tilde{y}_0 \|}$$

Lipschitzkonstante

Noch allgemeiner

$$y' = f(t,y), \quad y(t_0) = y_0$$
$$z' = g(t,z), \quad z(t_1) = z_0$$

f, g auf Q stetig differenzierbar

$$\|f(t,y) - g(t,y)\| \leq \delta$$
$$\|g(t,y)\| \leq M$$
$$\|f(t,y) - f(t,\tilde{y})\| \leq L\|y-\tilde{y}\|$$

$\Longrightarrow$

$$\|y(t) - z(t)\| \leq \|y_0 - z_0\| e^{L|t-t_0|} + M|t_1 - t_0| e^{L|t-t_0|} + \frac{\delta}{L}\left(e^{L|t-t_0|} - 1\right)$$

Beweisidee:

Gronwall'sches Lemma !!!