26.10.2007

VORBEMERKUNGEN

Vorlesung : Differentialgleichungen I
WS 07/08
TUHH
TAUBERT

Bestandteile Veranstaltung :

- Vorlesung
- Anleitungen
- Übungen

Anleitungen : ROTHE
25.10.07 Do 16.15–17.45
In diesem Hörsaal (14-tägig)

Übungen : 12 Gruppen
Rothe (4)
Sternberg (2)
Stumpf (2)
Taubert (2)
Vierling (2)

ÜBUNGSSCHEIN DGL I

- MINDESTENS 5 mal ANWESEND
- MINDESTENS 1 AUFGABE VORTRAGEN
- 50 % der MAXIMALZAHL von PUNKTEN (240)
  d.h. 120 PUNKTE!

- GRUPPENARBEIT EMPFOHLEN
  (3 - Personen)

VORLESUNGSUNTERLAGEN: NACHTRÄGLICH

http://www.uni-hamburg.de

Fakultäten . Department Mathematik . Studium
Informationen für Studierende . Lehrexport
Lehrexport TUUH . Lehrveranstaltungen .
Differentialgleichungen I.

www. math. uni-hamburg.de - teaching - export - tuh

DGL I

(für Studierende der Ing...)

INHALT

MATHEMATIK FÜR INGENIEURE (BAND 2)

S. 137 - 280

R. Ansorge / J. Oberle

Akademie Verlag 2. Auflage

Universität Hamburg

Departi
Mather

Prof. Dr. Klaus Taubert / Dr. Kai Rothe

Differentialgleichungen I für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Zeitplan im WiSe 2007/2008

Woche	Vorlesung	Seiten	Stichworte
1	Fr, 26.10.07	137-146	Beispiele gew. Diff.Gln., elementare Lösungsmethoden
2	Fr, 02.11.07	147-154	Lin. Diff.Gln. 1. Ordnung, exakte Diff.Gln., integrierende Faktoren
3	Fr, 09.11.07	155-163	Diff.Gln. 2. Ordnung, Existenz u. Eindeutigkeit bei Anfangswertaufgaben
4	Fr, 16.11.07	164-171	Existenz u. Eindeutigkeit bei Anfangswertaufgaben, Abhängigkeit v. Parametern
5	Fr, 23.11.07	172-177	Lineare Systeme 1. Ordnung
6	Fr, 30.11.07	178-184	Systeme 1. Ordnung m. konstanten Koeffizienten
7	Fr, 07.12.07	185-193	Lineare Diff.Gln. höherer Ordnung
8	Fr, 14.12.07	194-202	Stabilität, linearer Fall
9	Fr, 21.12.07	203-208	Stabilität, nichtlinearer Fall, Randwertaufgaben
10	Fr, 11.01.08	209-216	Randwertaufgaben, Variationsrechnung
11	Fr, 18.01.08	217-223	Lineare Randwertaufgaben 2. Ordnung, Eigenwertaufgaben
12	Fr, 25.01.08	224-234	Numerische Verfahren, Einschrittverfahren
13	Fr, 01.02.08	242-255	Mehrzielmethode zur Lösung von Randwertaufgaben
14	Fr, 08.02.08	269-280	Grundtypen partieller Diff.Gln.

Seitenzahlen nach Ansorge-Oberle, Mathematik für Ingenieure, Band 2, 2. Auflage 2000

Klaus Taubert (Stand: 04.10.2007)

DIFFERENTIALGLEICHUNGEN

WICHTIG

$\updownarrow$

ÜBERALL

Elektrotechnik
Mechanik
Strömungsmechanik
Meereskunde
Meteorologie
⋮
Biologie
Chemie
Physik

DIFFERENTIALGLEICHUNGEN

DGL's SIND GLEICHUNGEN IN DENEN DIE GESUCHTE FUNKTION <u>UND</u> ABLEITUNGEN DER FUNKTION AUFTRETEN.

Funktionen <u>einer</u> Variablen

$\rightsquigarrow$ gewöhnliche DGL's

Funktionen <u>mehrerer</u> Variablen

$\rightsquigarrow$ partielle DGL

Gewöhnliche DGL

$y = y(t) \qquad \frac{d}{dt} y(t) - y(t) = 0 \qquad \rightsquigarrow \quad y' - y = 0$

Partielle DGL

$u = u(x,y) \qquad \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x,y) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} u(x,y) = 0$

$\rightsquigarrow \quad u_{xx} + u_{yy} = 0$

Beispiele für gewöhnliche Differentialgleichungen

- $y' + \frac{y}{t} = 0$
- $y' - \mu + y^2 = 0 \qquad \mu \in \mathbb{R}$
- $c' + 0{,}0012(c - 1{,}75) = 0$

GEWÖHNLICHE DGL

DEFINITION

$$F(t, y(t), y'(t), \ldots, y^{(m)}(t)) = 0 \qquad (*)$$

$$F : [a,b] \times \underbrace{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \cdots \times \mathbb{R}^n}_{1+m \cdot \text{mal}} \to \mathbb{R}^n$$

heißt <u>implizites</u> DGL-System der Ordnung m.

GESUCHT

$$y : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

y m-mal stetig differenzierbar
($y \in C^m[a,b]$)

derart, daß $(*)$ für alle t erfüllt ist

Beispiel:

$$0 = F(t, y(t), y'(t)) = y'(t)\,y(t) - t\,y'^2(t) - \frac{1}{2}$$

$$F(t, y(t), y'(t), \ldots\ldots, y^{(m)}(t)) = 0 \qquad (*)$$

Läßt sich (*) nach $y^{m}(t)$ auflösen

$$y^{(m)}(t) = f(t, y(t), y'(t), \ldots, y^{(m-1)}(t))$$

dann liegt ein <u>expliztes</u> System von DGL vor

Falls F bzw. f nicht explizit von t abhängt

$$F(y(t), y'(t), \ldots, y^{(m)}(t)) = 0$$

$$y^{m}(t) = f(y(t), y'(t), \ldots, y^{m-1}(t))$$

dann heißt das System <u>autonom</u>

DGL'en besitzen regelhaft <u>unendlich</u> viele Lösungen

Zusätzliche Bedingungen schränken die Menge der Lösungen ein

- ANFANGSWERTAUFGABEN ~ AWA

$$y'(t) - f(t, y(t)) = 0$$
$$y(a) = y_a$$

$a \leq t \leq b$ $\qquad$ $y(t) \in \mathbb{R}^n$

<u>Beispiel</u> $(n=1)$

$$y'(t) = y(t) \qquad \overset{\text{Lösungen}}{\rightsquigarrow} \qquad y(t) = ce^t, \; c \in \mathbb{R}$$
$$y(0) = 0$$

$$y(0) = ce^0 = c = 0$$
$$\Downarrow$$
$$y(t) \equiv 0$$

- RANDWERTAUFGABEN

$$y'(t) = f(t, y(t)) \qquad a \le t \le b$$
$$r(y(a), y(b)) = 0$$
$$y(t) \in \mathbb{R}^n$$
$$r: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$

Beispiel $(n=1)$

$$y'(t) = y(t) \quad \overset{\text{Lösungen}}{\leadsto} \quad y(t) = Ce^t, \; C \in \mathbb{R}$$
$$y(0) + y(1) = 1$$

$$y(0) + y(1) = Ce^0 + Ce^1 \overset{!}{=} 1$$

$$\Longrightarrow C = \frac{1}{1+e}$$

$$y(t) = \frac{1}{1+e} e^t$$

BEISPIELE

Bevölkerungsmodell:

$N(t)$ Population zum Zeitpunkt t

$N(t+\Delta t)$ " $t+\Delta t$

$$\frac{\Delta N}{\Delta t} := \frac{N(t+\Delta t)-N(t)}{\Delta t} \approx (b-d)\, N(t)$$

Geburtenrate Sterberate

$$\Delta t \longrightarrow 0$$

$$N'(t) = (b-d)\,N(t)$$
$$N(t_0) = N_0$$

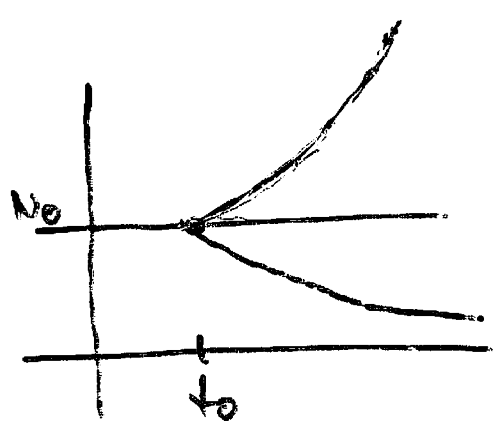
: Explizite Ordnung 1 autonom AWAe

$$N(t) = N_0 e^{(b-d)(t-t_0)}$$ löst die AWAe

$b>d$ exponen... wachsend

$b=d$

$b<d$ exponen... fallend



Bevölkerungsmodell (Verhulst)

$$N'(t) = \lambda N(t)(K - N(t))$$

$$= \lambda K N(t) - \lambda N^2(t)$$

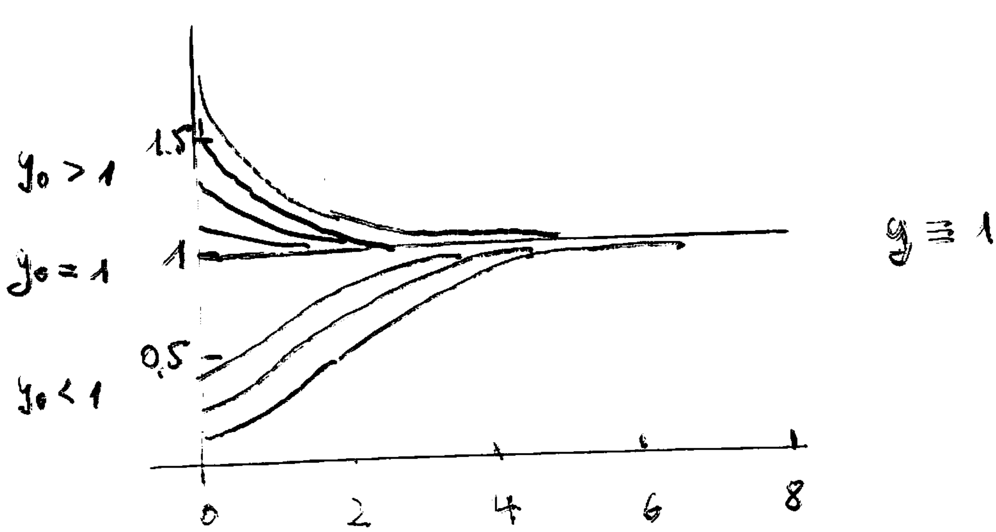
Geburtenrate λK $\quad\lambda N(t)$ – Sterberate

$$N(t) = \frac{K N_0}{N_0 + (K - N_0)\, e^{-\lambda K (t - t_0)}}$$

$$N(t_0) = N_0$$

Der Fall

$$y' = y - y^2$$
$$y(0) = y_0$$



Lösungen der logistischen Gleichung

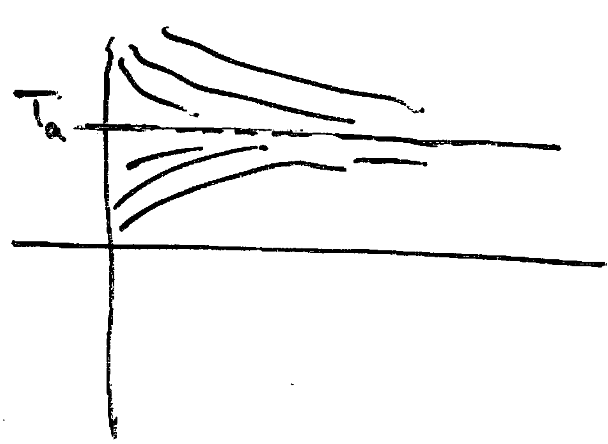
Beispiel (Newton'sche Abkühlung)

$$\frac{dT(t)}{dt} = \frac{kF}{cm}\left(T_a(t) - T(t)\right)$$

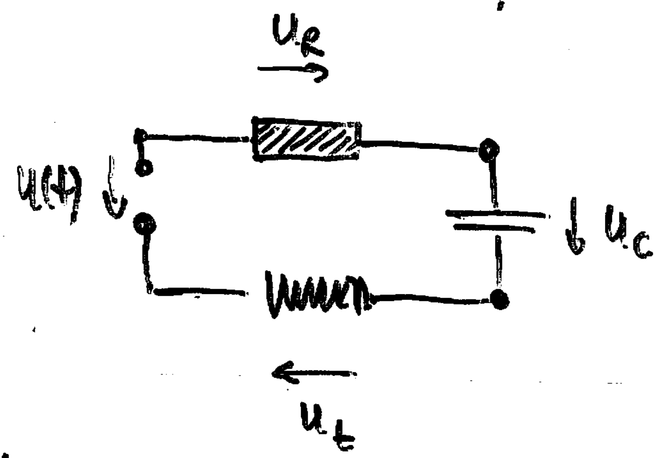
$T_a(t)$	Außentemperatur
m	Masse
F	Oberfläche
c	Spezifische Wärme
k	Proportionalitätsfaktor

z.B. $\qquad T_a(t) = T_a = \text{Konstante}$

$\Rightarrow \quad T(t) = T_a$ Lösung



BEISPIEL (Schwingkreis)



$$u_R + u_C + u_L = u(t)$$

(I, u) Relationen

$$u_R = RI = RC\dot{u}_C$$
$$u_L = L\dot{I} = LC\ddot{u}_C \qquad (\dot{\ }) = \frac{d}{dt}(\ )$$
$$I = C\dot{u}_C$$

$$LC\ddot{u}_C + RC\dot{u}_C + u_C = u(t)$$

$$\ddot{u}_C = -\frac{R}{L}\dot{u}_C - \frac{1}{LC}u_C + \frac{1}{LC}u(t)$$

(explizite DGL zweiter Ordnung)

(RCL-Glied)

Umschreibung von Systeme höherer Ordnung in Ordnung 1 Systeme

Beispiel :

$$\ddot{u}_C = -\frac{R}{C}\dot{u}_C - \frac{1}{LC}u_C + \frac{1}{LC}u(t)$$

$$y_1(t) := u_C(t)$$

$$y_2(t) := \dot{u}_C(t)$$

$$\dot{y}_1 = y_2$$

$$\dot{y}_2 = -\frac{R}{C}y_2 - \frac{1}{LC}y_1 + \frac{1}{LC}u(t)$$

$$y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}$$

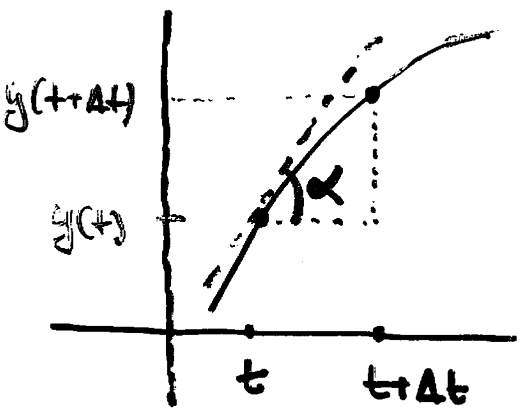
$$\dot{y}(t) = f(t, y(t))$$

System 1. Ordnung, explizit, nichtautonom

GEOMETRISCHE DEUTUNG EINER DGL erster Ordnung
$(n=1)$

$$\dot{y}(t) = f(t, y(t))$$

$y(\cdot)$ sei eine Lösung der DGL



$$\frac{y(t+\Delta t) - y(t)}{\Delta t}$$

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{y(t+\Delta t) - y(t)}{\Delta t} = \tan\alpha$$

$$\tan\alpha = f(t, y(t))$$

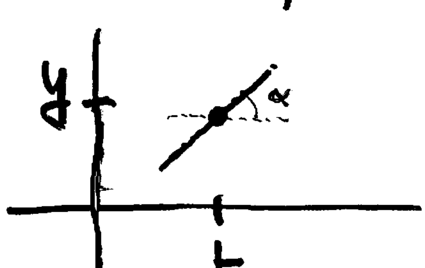
D.h. Eine Lösung durch den Punkt $(t, y(t))$ hat die Steigung α mit

$$\tan\alpha = f(t, y(t))$$

Jedem Punkt $(t,y) \in \mathbb{R}^2$ wird nun das Tripel

$$(t, y, f(t,y))$$

zugeordnet (Linienelement)

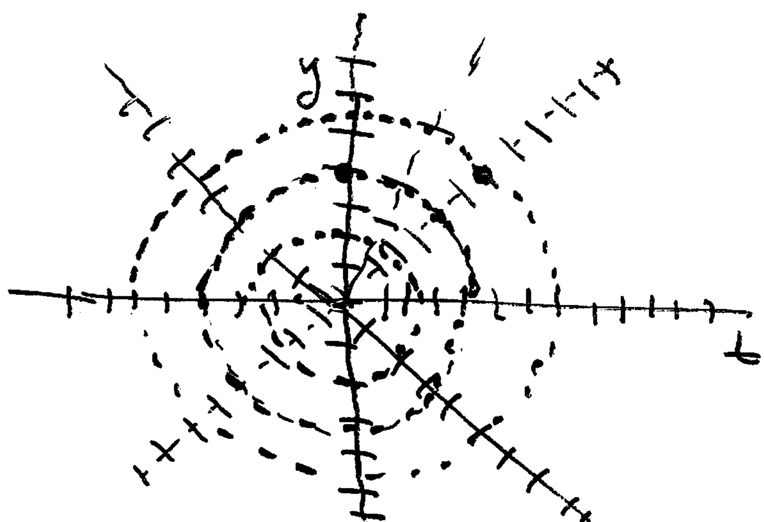


Zeichnet man "hinreichend" viele Linienelemente (Richtungsfeld) für eine DGL

$$y' = f(t,y)$$

dann bekommt man häufig einen Eindruck über das Verhalten der Lösungen

z.B.



Lösung "raten"

$$y^2(t) + t^2 = r^2$$

$$\frac{d}{dt}: \quad 2y(t)y'(t) + 2t = 0$$

$$y' = -\frac{t}{y}$$

" GERADEN DURCH DEN PUNKT (0,0) SIND MENGEN AUF DENEN ALLE LÖSUNGEN DER DGL DIE GLEICHE STEIGUNG HABEN "

" RICHTUNGSFELD WIE OBEN " !!!

Elementare Lösungsmethoden

1) Separierbare DGL

$$y' = f(t)\,g(y)$$

$y(t)$ sei Lösung

$g(y) \neq 0$

$$\frac{y'(t)}{g(y(t))} = f(t)$$

$$\int_{t_0}^{t} \frac{y'(\tau)}{g(y(\tau))}\,d\tau = \int_{t_0}^{t} f(\tau)\,d\tau$$

$H(y)$ sei Stammfunktion zu $\frac{1}{g(y)}$

$$\Longrightarrow \frac{d}{dt} H(y(t)) = \frac{y'(t)}{g(y(t))}$$

$$H(y(t)) - H(y(t_0)) = \int_{t_0}^{t} f(\tau)\,d\tau$$

H^{-1} existiert (!)

$$y(t) = H^{-1}\left(H(y(t_0)) + \int_{t_0}^{t} f(\tau)\,d\tau \right)$$

FORMALE VORGEHENSWEISE :

$$\frac{dy}{dt} = f(t)\,g(y) \longrightarrow \frac{dy}{g(y)} = f(t)\,dt$$

$$\longrightarrow \int_{y_0}^{y} \frac{1}{g(y)}\,dy = \int_{t_0}^{t} f(\tau)\,d\tau$$

$$\longrightarrow H(y) - H(y_0) = \int_{t_0}^{t} f(\tau)\,d\tau$$

$$y = H^{-1}\Big(H(y_0) + \int_{t_0}^{t} f(\tau)\,d\tau\Big) \quad !!!$$

Beispiel :

$$y' = -\frac{t}{y}$$

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{t}{y} \longrightarrow (dy)\,y = -t\,dt$$

$$\longrightarrow \int_{y_0}^{y} y\,dy = -\int_{t_0}^{t} \tau\,d\tau \rightarrow \frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{2}y_0^2 = -\Big(\frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{2}t_0^2\Big)$$

$$y^2 + t^2 = (y_0^2 + t_0^2)$$

$$y^2(t) = -t^2 + (y_0^2 + t_0^2)$$

2. Homogene DGL $\quad y' = f\left(\frac{y}{t}\right)$

Substitution

$$u = \frac{y}{t} \quad \rightsquigarrow \quad y = ut$$

$$y' = (ut)' = u't + u$$

$$y' = f\left(\frac{y}{t}\right) \qquad u't + u = f(u)$$

$$u' = \frac{f(u) - u}{t}$$

Typ: Separierbar !!!