Differentialgleichungen I, WS07/08, 26.02.2008, (Taubert)

Aufgabe 1:

Gegeben sei die Anfangswertaufgabe

$$\boldsymbol{y}' = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \boldsymbol{y} - \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \end{pmatrix} , \quad \boldsymbol{y}(0) = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix} .$$

Man berechne

a) die allgemeine Lösung des zugehörigen homogenen Systems,

b) eine spezielle Lösung des zugehörigen inhomogenen Systems,

c) dann die Lösung der Anfangswertaufgabe und

d) alle Gleichgewichtspunkte des zu Grunde liegenden inhomogenen Differentialgleichungssystem, untersuche diese auf Stabilität und gebe den Typ an.

Aufgabe 2:

a) Man berechne die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$2xy + \left(2x^2 + \frac{\cos y}{y}\right) y' = 0 ,$$

dabei reicht eine implizite Lösungsdarstellung aus.

Hinweis: Es gibt einen integrierenden Faktor der Form $m = m(y)$.

b) Gegeben ist die Minimierungsaufgabe: Minimiere das Funktional

$$I[y] = \int_0^2 16y^2 + (y')^2 - 8yy' \, dt$$

für alle C^1-Funktionen y mit $y'(0) = 0$ und $y(2) = 1$.

(i) Man stelle die zugehörige Euler-Lagrange-Gleichung auf und

(ii) löse die zugehörige Randwertaufgabe.