Aufgabe 1)

Bitte bewerten Sie folgende Aussagen. Tragen Sie in die zugehörigen Kästchen die Buchstaben ,,w" (für wahr) oder ,,f" für falsch ein. Für jede richtig bewertete Aussage erhalten Sie einen Punkt. Für jede falsch bewertete Aussage wird Ihnen ein halber Punkt abgezogen. Nicht bewertete Aussagen gehen nicht in die Wertung ein.

a) Die Substitution $u = \dfrac{y}{t}$ führt die Differentialgleichung

$$y' = \frac{t^3 + y^3}{ty^2}, \qquad t, y \neq 0,$$

über in die Differentialgleichung

$\boxed{\text{f}}$ $u' = \dfrac{1}{u^2} + u, \qquad t, u \neq 0.$

$\boxed{\text{w}}$ $u' = \dfrac{1}{u^2 t}, \qquad t, u \neq 0.$

b) Die Differentialgleichung $2t + \dfrac{t^2+1}{y} y' = 0, \qquad y \neq 0$

$\boxed{\text{w}}$ hat einen integrierenden Faktor der Form $m(t)$.

$\boxed{\text{w}}$ hat einen integrierenden Faktor der Form $m(y)$.

$\boxed{\text{w}}$ Die Differentialgleichung kann durch elementare Operationen (Addition, Multiplikation,etc.) in eine äquivalente separierbare Differentialgleichung überführt werden.

$\boxed{\text{f}}$ Die Lösung der zugehörigen Anfangswertaufgabe

$$2t + \frac{t^2+1}{y} y' = 0, \qquad y \neq 0, \qquad y(0) = 1,$$

nimmt an der Stelle $t = 1$ den Wert $y(1) = 3$ an.

$\boxed{\text{w}}$ Die Lösung der zugehörigen Anfangswertaufgabe

$$2t + \frac{t^2+1}{y} y' = 0, \qquad y \neq 0, \qquad y(0) = 2,$$

nimmt an der Stelle $t = 1$ den Wert $y(1) = 1$ an.

c) Mit Hilfe der folgenden Matlab Befehle soll eine Näherung für die Lösung der Anfangswertaufgabe

$$y''(t) + y(t) = \cos(t)\,, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 0$$

für $t \in [0, 1]$ berechnet und geplottet werden.

```
function klausur

tspan=[0 1];
y0=[2; 0];
 [t,y] = ode45(@AWA,tspan,y0);
plot(t,y(:,1))
```

Schreiben Sie das noch fehlende Unterprogramm zur Auswertung der rechten Seite der Differentialgleichung.

Eine mögliche Lösung:

```
function  dydt=AWA(t,y)
 y1dot=y(2);
 y2dot=-y(1) + cos(t);
dydt=[y1dot
        y2dot];
```

Aufgabe 2) Gegeben sei die Randwertaufgabe

$$\begin{array}{lclcclcl} y_1'(t) & = & \frac{1}{2}\,y_1(t) & - & \frac{1}{2}\,y_2(t) & + & g(t)\,, \\ y_2'(t) & = & y_1(t) & - & \frac{1}{2}\,y_2(t) & + & h(t)\,, \\ y_2(0) & - & 2y_1(0) & = d_1\,, & & y_2(\pi) & -y_1(\pi) = d_2\,, \end{array}$$

mit stetigen Funktionen g und h und reellen Zahlen d_1 und d_2.

a) Formulieren Sie die Randwertaufgabe in Matrixschreibweise.

b) Bestimmen Sie eine reelle Darstellung der allgemeinen Lösung des homogenen Differentialgleichungssystems.

c) Zeigen Sie, dass die Randwertaufgabe für beliebige stetige Funktionen g und h eindeutig lösbar ist.

d) Bestimmen Sie eine partikuläre Lösung des inhomogenen Differentialgleichungssystems für den Fall, dass

$$g(t) = 0, \quad \text{und} \quad h(t) = 1$$

gelten.

Hinweis : Die Verwendung eines speziellen Ansatzes ist ratsam!

Lösung:

a) **[2 Punkte]**

$$\mathbf{y}'(t) := \begin{pmatrix} y_1'(t) \\ y_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} g(t) \\ h(t) \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(\pi) \\ y_2(\pi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix}.$$

b)

$$\left(\frac{1}{2} - \lambda\right)\left(-\frac{1}{2} - \lambda\right) + \frac{1}{2} = 0 \iff \lambda = \pm i/2 \qquad \textbf{[1 Punkt].}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} - \frac{i}{2} & -\frac{1}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2} - \frac{i}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff v_2 = (1-i)v_1\,.$$

Komplexe Lösung: [**1 Punkt**]

$$z(t) \;=\; e^{\frac{i}{2}t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1-i \end{pmatrix} \;=\; \left(\cos\frac{t}{2} \,+\, i\,\sin\frac{t}{2}\right) \begin{pmatrix} 1 \\ 1-i \end{pmatrix}$$

Die reellen Lösungen ergeben sich aus Real– und Imaginärteil der komplexen Lösung: [**2 Punkte**]

$$\mathbf{y}^{[1]}(t) \;=\; \begin{pmatrix} \cos\frac{t}{2} \\ \cos\frac{t}{2} \,+\, \sin\frac{t}{2} \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{y}^{[2]}(t) \;=\; \begin{pmatrix} \sin\frac{t}{2} \\ \sin\frac{t}{2} \,-\, \cos\frac{t}{2} \end{pmatrix}.$$

Die Allgemeine Lösung lautet $\quad y_h(t) = c_1 y^{[1]}(t) \,+\, c_2 y^{[2]}(t)\,.$

c) Die Shooting Matrix

$$E = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

ist regulär. Daher ist die RWA für beliebige rechte Seiten eindeutig lösbar. [**2 Punkte**]

d) Spezielle Lösung der inhomogenen Aufgabe: [**2 Punkte**]

Einsetzen des Ansatzes $\mathbf{y}_p(t) = (a,b)^T$ in das DGL–System ergibt

$$\mathbf{y}' = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{a}{2} - \frac{b}{2} \\ a - \frac{b}{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Aus der ersten Gleichung folgt $\qquad a = b\,.$

Dies eingestzt in die zweite Gleichung liefert $\qquad a = b = -2$ und damit

$$\mathbf{y}_p(t) = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix}$$