Aufgabe 1)

a) Gegeben sei das Differentialgleichungssystem

$$y' = A\,y \qquad \text{mit} \qquad A := \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Es sei i die imaginäre Einheit ($i^2 = -1$). Die Matrix A hat den doppelten Eigenwert $2i$. Die Vektoren

$$v_1 := \begin{pmatrix} 1 & i & 0 & 0 \end{pmatrix}^T, \qquad \text{und} \qquad v_2 := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -i \end{pmatrix}^T$$

sind Eigenvektoren der Matrix A zum Eigenwert $2i$. Aus diesen Informationen folgt:

$\boxed{\text{f}}$ Durch

$$y(t) = \begin{pmatrix} c_1\cos(2t) \\ -c_2\sin(2t) \\ c_3\cos(2t) \\ -c_4\sin(2t) \end{pmatrix} \qquad c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbb{R}$$

ist die allgemeine reelle Lösung des Systems gegeben.

$\boxed{\text{w}}$ Die Funktionen

$$y^{[1]}(t) = \begin{pmatrix} \cos(2t) \\ -\sin(2t) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad y^{[2]}(t) = \begin{pmatrix} \sin(2t) \\ \cos(2t) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$y^{[3]}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \cos(2t) \\ \sin(2t) \end{pmatrix} \qquad y^{[4]}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \sin(2t) \\ -\cos(2t) \end{pmatrix}$$

bilden ein reelles Fundamentalsystem für die Aufgabe $y' = A\,y$.

$\boxed{\text{f}}$ Für die Lösung der zugehörigen Anfangswertaufgabe

$$y' = A\,y\,, \quad y(0) = (1, 1, 1, 1)^T$$

gilt $y(\pi) = (1,\ -1,\ -1,\ 1)^T$.

$\boxed{\text{f}}$ Der Gleichgewichtspunkt $y = (0, 0, 0, 0)^T$ ist strikt stabil.

b) Sei $Y(s)$ die Laplace Transformierte der Lösung $y(t)$ der Anfangswertaufgabe

$$y''' + y'' + y' + y = e^{-t}\,, \quad y(0) = 0,\, y'(0) = \frac{3}{2},\; y''(0) = -1\,.$$

Dann erhält man als Laplace Transformierte der Anfangswertaufgabe die folgende algebraische Gleichung im Bildraum

$\boxed{\text{f}}$ $\quad (s^3 + s^2 + s + 1)Y = \dfrac{1}{s+1}$.

$\boxed{\text{f}}$ $\quad (s^3 + s^2 + s + 1)Y - \dfrac{3}{2} + 1 = \dfrac{1}{s+1}$.

$\boxed{\text{w}}$ $\quad (s^3 + s^2 + s + 1)Y - \dfrac{3s}{2} - \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{s+1}$.

c) Mit Hilfe der folgenden Matlab Befehle soll eine Näherung für die Lösung der Anfangswertaufgabe

$$y'(t) = \frac{e^{-t}}{t^2+1}\, y(t)\,, \quad y(0) = 2$$

für $t \in [0,3]$ berechnet und geplottet werden.

```
function klausur
tspan= [0 3];
y0=2;
[t,y] = ode45(@AWA, tspan, y0);
 plot(t,y)
```

(i) Schreiben Sie das noch fehlende Unterprogramm zur Auswertung der rechten Seite der Differentialgleichung.

(ii) Ergänzen Sie das Programm, so dass ein Näherungswert $y3$ für den Wert der Lösung y(t) an der Stelle $t = 3$ ausgegeben wird. Sie brauchen nicht das Programm abzuschreiben. Geben Sie nur an, an welcher Stelle welche zusätzliche(n) Zeile(n) stehen muss/müssen.

Lösung zu c)

a)
```
function dydt=AWA(t,y)
    dydt=exp(-t)*y/(t^2+1);
```

b) Unmittelbar vor dem Plot-Befehl oder als letzte Zeile des Programms

```
yend=y(end)
```

oder z.B. an gleicher Stelle

```
l=length(y)
yend=y(l)
```

Aufgabe 2)

a) Gegeben sei das Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned} y_1' &= y_1^2\, y_2 \,+\, y_2^3 \,-\, 2y_1\, y_2^2 \\ y_2' &= -\,y_1^3 \,-\, y_1\, y_2^2\,. \end{aligned}$$

Untersuchen Sie den Gleichgewichtspunkt $y_1^* = y_2^* = 0$ des Systems auf Stabilität. Verwenden Sie gegebenenfalls eine Funktion der Form

$$V(y_1, y_2) \,=\, ay_1^2 + by_2^2\,.$$

b) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der **inhomogenen** Differentialgleichung

$$y''' + y'' \,=\, 2\,.$$

c) Schreiben Sie die Randwertaufgabe

$$\begin{aligned} y''' + y'' &= 2\,, \\ 2y(0) \,-\, y'(0) &= 0\,, \\ y(1) \,-\, y'(1) &= 0\,, \\ y''(0) \,-\, y''(1) &= 0\,, \end{aligned}$$

in Matrixschreibweise um.

Lösungshinweise zur Aufgabe 2)

a) Mit den üblichen Bezeichnungen gilt

$$JF(y_1, y_2) \,=\, \begin{pmatrix} 2y_1y_2 - 2y_2^2 & y_1^2 + 3y_2^2 - 4y_1y_2 \\ -3y_1^2 - y_2^2 & -2y_1y_2 \end{pmatrix} \Longrightarrow JF(0,0) \,=\, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Mit Hilfe der Eigenwerte von $JF(0,0)$ ist also keine Aussage über die Stabilität zu erhalten.

Mit

$$V(y_1, y_2) \,=\, ay_1^2 + by_2^2 \;\text{ und damit } \nabla V = \begin{pmatrix} 2ay_1 \\ 2by_2 \end{pmatrix}$$

gilt

$$\begin{aligned} < \nabla V, f > &= 2(ay_1^3\, y_2 \,+\, ay_1y_2^3 \,-\, 2ay_1^2\, y_2^2 - b\, y_1^3 y_2 \,-\, by_1\, y_2^3) \\ &= 2(y_1^3\, y_2(a-b) + y_1y_2^3(a-b) -\, 2ay_1^2\, y_2^2) \end{aligned}$$

Mit $a = b > 0$ hat man also eine Ljapunov Funktion.

Denn es gilt $\quad V(0,0) = 0$

$V(y_1, y_2) > 0, \quad \forall (y_1, y_2) \neq (0,0)$

$< \nabla V, f > \leq 0$

allerdings gilt

$y_1 = 0 \vee y_2 = 0 \Longrightarrow < \nabla V, f > = 0$

Man kann nur auf Stabilität und nicht auf asymptotische Stabilität schließen.

b) $\lambda^2(\lambda + 1) = 0 \Longrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 0,\ \lambda_3 = -1$

$y_1(t) = e^{0t} = 1, \quad y_2(t) = te^{0t} = t, \quad y_3(t) = e^{-t}$

$y_h(t) = c_1 + c_2 t + c_3 e^{-t}$.

Ansatz für $y_p = \alpha t^2 \cdot e^0$ eingesetzt in die Dgl. ergibt $\alpha = 1$. Also hat man die allgemeine Lösung:

$y(t) = c_1 + c_2 t + t^2 + c_3 e^{-t}$.

c) Mit $Y(t) := (y(t),\, y'(t),\, y''(t))^T$:

$$Y'(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot Y(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot Y(0) + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot Y(1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$