LAGRANGE-Funktion, hinreichende Optimalitätsbedingungen

Buch Kap. 5.14

LAGRANGE-Funktion

$f : D \to \mathbb{R}$ und $\mathbf{h} : D \to \mathbb{R}^m$ seien zweimal stetig partiell diffbar auf $D \subset \mathbb{R}^n$, $n > m$ mit $\operatorname{rang}(\mathbf{h}'(\mathbf{x})) = m$ für jedes $\mathbf{x} \in D$.
Es gelte

$$\operatorname{grad} L(x, \mu) = 0$$

$$\begin{pmatrix} w \\ 0 \end{pmatrix}^T H_L(x,\mu) \begin{pmatrix} w \\ 0 \end{pmatrix} > (<) \ 0$$

und

$$\cancel{w^T H_L(x, \mu) w > (<)} 0 \text{ für alle } w \neq 0 \in \ker \cancel{Dh(x)}. \quad h'(x)$$

Dann ist x striktes lokales Minimum (Maximum) von f unter $h = 0$.

LAGRANGE-Funktion, hinreichende Optimalitätsbedingungen

Buch Kap. 5.14

Beispiele

$$f(x,y) = x^2 y \qquad NB \quad h(x,y) = \left(\frac{x}{3}\right)^2 + \left(\frac{y}{4}\right)^2 - 1 = 0$$

$$L(x,y,\mu) = x^2 y - \mu\left(\left(\frac{x}{3}\right)^2 + \left(\frac{y}{4}\right)^2 - 1\right)$$

$$\operatorname{grad} L(x,y,\mu) = \begin{pmatrix} 2xy - \frac{2\mu x}{9} \\ x^2 - \frac{\mu y}{8} \\ -\left(\frac{x}{3}\right)^2 - \left(\frac{y}{4}\right)^2 + 1 \end{pmatrix} = 0$$

1. Fall: $x = 0 \Rightarrow y = \pm 4 \wedge \mu = 0 \qquad (0,4) \quad (0,-4)$

2. Fall: $x \neq 0 \Rightarrow y - \frac{\mu}{9} = 0 \Rightarrow \mu = 9y \Rightarrow x^2 = \frac{9}{8} y^2$

$$\Rightarrow \frac{y^2}{8} + \frac{y^2}{16} = 1 \Rightarrow \frac{3}{16} y^2 = 1 \Rightarrow y^2 = \frac{16}{3}$$

$$\Rightarrow y = \pm \frac{4}{\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow x^2 = \frac{9}{8} \cdot \frac{16}{3} = 6 \Rightarrow x = \pm\sqrt{6}$$

LAGRANGE-Funktion, hinreichende Optimalitätsbedingungen

Buch Kap. 5.14

Beispiele

$$\left(\sqrt{6}, \frac{4}{\sqrt{3}}\right)\ \left(-\sqrt{6}, \frac{4}{\sqrt{3}}\right),\ \left(\sqrt{6}, -\frac{4}{\sqrt{3}}\right),\ \left(-\sqrt{6}, -\frac{4}{\sqrt{3}}\right)$$

$$h'(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{2}{5}x & \frac{1}{8}y \end{pmatrix}$$

$$H_L(x,y,\mu) = \begin{pmatrix} 2y - \frac{2}{5}\mu & 2x & -\frac{2}{5}x \\ 2x & -\frac{\mu}{8} & -\frac{y}{8} \\ -\frac{2}{5}x & -\frac{y}{8} & 0 \end{pmatrix}$$

1.) $(x,y) = (0,4), \mu = 0,\quad h'(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \Rightarrow \operatorname{Ker} h'(x,y) = \operatorname{span}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$w \in \operatorname{Ker} h'(x,y) \setminus \{0\} \Rightarrow w = \begin{pmatrix} w_1 \\ 0 \end{pmatrix}$ mit $w_1 \neq 0$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} w \\ 0 \end{pmatrix}^T H_L(x,y,\mu) \begin{pmatrix} w \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 8 w_1^2 > 0$$

Minimum!

2.) $(x,y) = (0,-4)$, $\mu = 0$, $h'(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \Rightarrow \operatorname{Ker} h'(x,y) = \operatorname{span}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$w = \begin{pmatrix} w_1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $w_1 \neq 0$

$$\begin{pmatrix} w \\ 0 \end{pmatrix}^T H_L(x,y,\mu) \begin{pmatrix} w \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} -8 & * \\ * & * \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = -8 w_1^2 < 0 \Rightarrow \text{Max}$$

3) $(x,y) = (\sqrt{6}, \frac{4}{\sqrt{3}}) \Rightarrow h'(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{2\sqrt{6}}{5} & \frac{1}{2\sqrt{3}} \end{pmatrix} \Rightarrow \operatorname{Ker} h'(x,y) = \operatorname{span}\begin{pmatrix} -\frac{1}{2\sqrt{3}} \\ \frac{2\sqrt{6}}{5} \end{pmatrix}$

Das NEWTON-Verfahren