Satz über implizite Funktionen

Buch Kap. 5.12

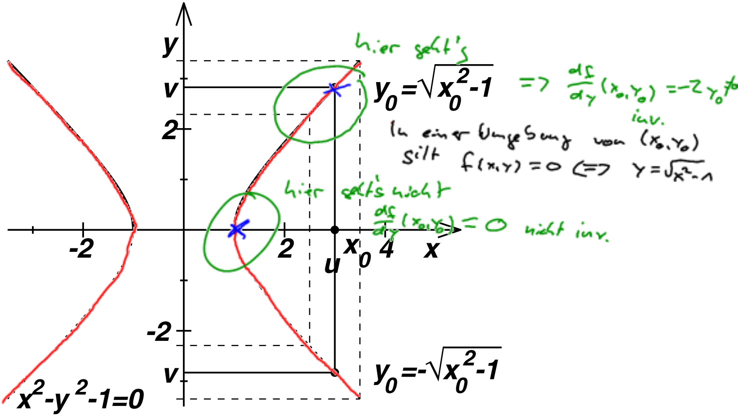

Abbildung 5.20: Zur Auflösbarkeit der Gleichung $f(x,y) = x^2 - y^2 - 1 = 0$ nach y

$J_f(x,y) = (2x \,\vdots\, -2y)$

$y^2 = x^2 - 1$

$k = n = 1$ $\quad \frac{df}{dy}(x,y) = -2y$

Satz über implizite Funktionen

Buch Kap. 5.12

Satz 5.10: Satz über implizite Funktionen

Sei $f : U_1 \times U_2 \to \mathbb{R}^m$ stetig diffbar, wobei $U_1 \subset \mathbb{R}^k$ und $U_2 \subset \mathbb{R}^m$ offene Mengen bezeichnen. Es gelte $f(x_0, y_0) = 0$ und $D_y f(x_0, y_0)$ sei invertierbar.
Dann gibt es offene Mengen $V_1(x_0) \subset U_1$, $V_2(y_0) \subset U_2$ und eine stetige Funktion $g : V_1 \to V_2$ mit

$$f(x, g(x)) = 0 \text{ für alle } x \in V_1.$$

Ferner ist g stetig diffbar mit

$$Dg(x) = -D_y f(x, g(x))^{-1} D_x f(x, g(x)).$$

Beachte: Ist $(x, y) \in V_1 \times V_2$ mit $f(x, y) = 0$, so folgt schon $y = g(x)$.

Satz über implizite Funktionen

Buch Kap. 5.12

Beispiel

$$J_f(x_0,y_0) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_0,y_0) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_k}(x_0,y_0) & \frac{\partial f_1}{\partial y_1}(x_0,y_0) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial y_m}(x_0,y_0) \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(x_0,\dots,y_0) & & \frac{\partial f_m}{\partial x_k}(x_0,y_0) & \frac{\partial f_m}{\partial y_1}(x_0,y_0) & & \frac{\partial f_m}{\partial y_m}(x_0,y_0) \end{array}\right) \in \mathbb{R}^{m\times(k+m)}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y_1}(x_0,y_0) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial y_m}(x_0,y_0) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial y_1}(x_0,y_0) & & \frac{\partial f_m}{\partial y_m}(x_0,y_0) \end{pmatrix}}_{=: \frac{df}{dy}(x_0,y_0) \in \mathbb{R}^{m\times m}}$$

$x = (x_1,\dots,x_k)$

$y = (y_1,\dots,y_m)$

Kleines Bsp: $f(x,y) = x^2+y^2-1 = 0$

$J_f(x,y) = (2x \;\; 2y)$

$(x_0,y_0) = \left(\frac{1}{\sqrt2}, \frac{1}{\sqrt2}\right) \Rightarrow \frac{df}{dy}(x_0,y_0) = \sqrt2 \neq 0 \Rightarrow$ lok. Aufl. möglich

$y^2 = 1 - x^2 \Rightarrow y = g(x) = \sqrt{1-x^2}$ ist impl. Fkt

$(x_0,y_0) = (1,0) \Rightarrow \frac{df}{dy}(x_0,y_0) = 0 \Rightarrow$ keine Aussage über lok. Auflösung möglich

Extrema mit Nebenbedingungen

Buch Kap. 5.14

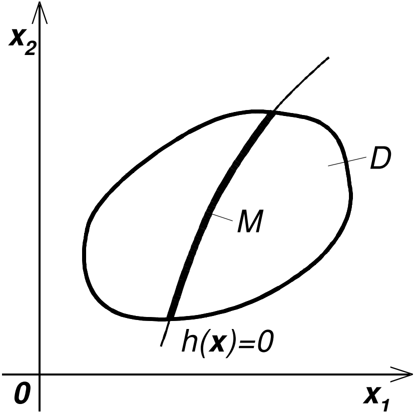

Abbildung 5.23: Die Menge $M = \{\mathbf{x} \in D \,|\, \mathbf{h}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}\}$ für $n = 2$ Raumdimensionen mit einer Nebenbedingung $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, d.h., $m = 1$.

Extrema mit Nebenbedingungen und LAGRANGE-Multiplikatoren

Buch Kap. 5.14

Satz 5.15: LAGRANGE-Multiplikatoren

Die Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ und die Abbildung $\mathbf{h} : D \to \mathbb{R}^m$ seien stetig partiell differenzierbar auf einer offenen Menge $D \subset \mathbb{R}^n$, $n > m$, wobei die JACOBI-Matrix $\mathbf{h}'(\mathbf{x})$ für jedes $\mathbf{x} \in D$ den Rang m habe. Dann gilt: Ist $\mathbf{x}_0 \in D$ eine lokale Extremalstelle von f unter der Nebenbedingung $\mathbf{h}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$, so existiert eine $(1 \times m)$-Matrix (Zeilenvektor) $\mathbf{L} = (\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m)$ mit

$$f'(\mathbf{x}_0) + \mathbf{L}\,\mathbf{h}'(\mathbf{x}_0) = \mathbf{0}\ .$$

Die reellen Zahlen $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m$ heißen LAGRANGE-Multiplikatoren.

Extrema mit Nebenbedingungen und LAGRANGE-Multiplikatoren

Buch Kap. 5.14

Satz 5.16: LAGRANGE-Multiplikatoren mit einer Nebenbedingung

Durch $f : D \to \mathbb{R}$ und $g : D \to \mathbb{R}$ werden zwei stetig partiell differenzierbare Funktionen auf einer offenen Menge $D \subset \mathbb{R}^n$ beschrieben. Dabei sei $\operatorname{grad} g(\mathbf{x}) \neq \mathbf{0}$ für alle $\mathbf{x} \in D$. Ist $\mathbf{x}_0 \in D$ eine lokale Extremalstelle von f unter der Nebenbedingung $g(\mathbf{x}) = 0$, so gilt

$$\operatorname{grad} f(\mathbf{x}_0) + \lambda \operatorname{grad} g(\mathbf{x}_0) = \mathbf{0}$$

mit einer reellen Zahl λ (LAGRANGE−Multiplikator).

Extrema mit Nebenbedingungen

Buch Kap. 5.14

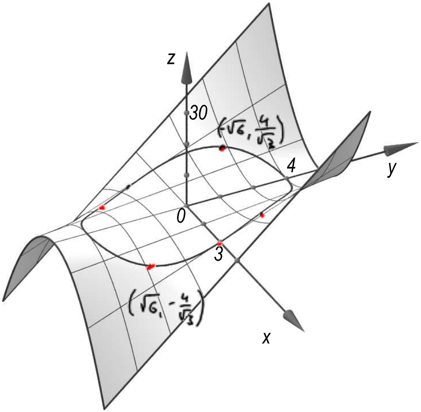

Abbildung 5.24: Graph der Funktion $f(x, y) = x^2 y$ mit Einschränkung des Graphen auf die Nebenbedingungsmenge

Extrema mit Nebenbedingungen

Buch Kap. 5.14

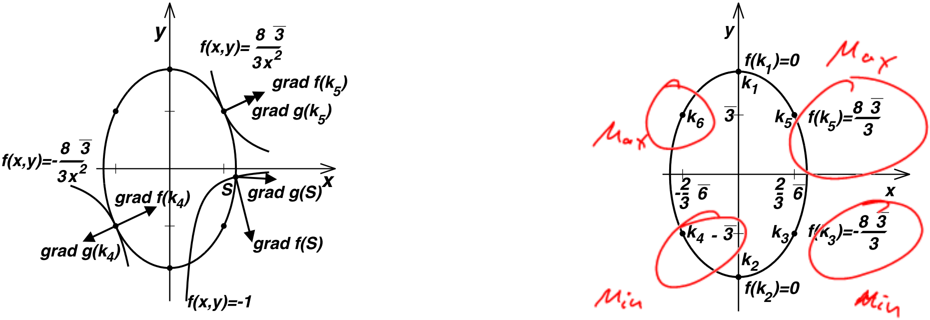

Abbildung 5.25: Gradienten von f und g und Extremwerte von $f(x, y)$ in den Punkten $K_1, \ldots, K_6$ auf dem Niveau $g(x, y) = 0$

Extrema mit Nebenbedingungen

Buch Kap. 5.14

Beispiel

Finde Extrema von $f(x,y) = x^2 y$ unter NB $\underbrace{\left(\frac{y}{4}\right)^2 + \left(\frac{x}{3}\right)^2 - 1}_{h(x,y)} = 0$

$\operatorname{grad} f(x,y) = \begin{pmatrix} 2xy \\ x^2 \end{pmatrix}$ $\quad$ $\operatorname{grad} h(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{2x}{9} \\ \frac{y}{8} \end{pmatrix}$

$\operatorname{grad} f(x,y) + \lambda \operatorname{grad} h(x,y) = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 2xy \\ x^2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} \frac{2x}{9} \\ \frac{y}{8} \end{pmatrix} = 0$

$\Rightarrow \quad 2xy + \lambda x \cdot \frac{2}{9} = 0 \quad \wedge \quad x^2 + \lambda \frac{y}{8} = 0$

1. Fall: $x \neq 0$: $9y + \lambda = 0 \wedge 8x^2 + \lambda y = 0 \wedge \frac{y^2}{16} + \frac{x^2}{9} - 1 = 0$

$\Rightarrow 9y + \lambda = 0 \wedge 8x^2 - 9y^2 = 0 \wedge 9y^2 + 16x^2 - 144 = 0$

$\Rightarrow 9y + \lambda = 0 \wedge 8x^2 - 9y^2 = 0 \wedge 24x^2 - 144 = 0$

$\Rightarrow \lambda = -9y \wedge y^2 = \frac{8}{9}x^2 \wedge x^2 = 6 \Rightarrow x = \pm\sqrt{6}$

$y^2 = \frac{16}{3} \Rightarrow (x,y) = \left(\pm\sqrt{6}, \pm\frac{4}{\sqrt{3}}\right)$

2. Fall: $x = 0 \Rightarrow \operatorname{grad} f(x,y) = 0 = -0 \operatorname{grad} h(x,y)$

$\Rightarrow (x,y) = (0, \pm 4)$ ist auch Kandidat

Extrema mit Nebenbedingungen

Buch Kap. 5.14

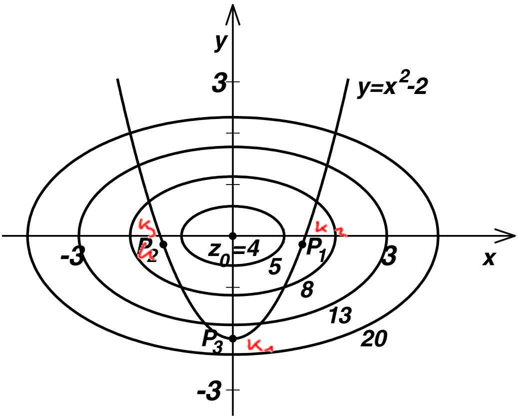

Abbildung 5.26: Extremwerte von $f(x, y) = x^2 + 3y^2 - 4$ auf dem Niveau $x^2 - y - 2 = 0$

Extrema mit Nebenbedingungen

Buch Kap. 5.14

Beispiel

$f(x,y) = x^2 + 3y^2 - 4 \qquad h(x,y) = x^2 - y - 2 = 0$

$\operatorname{grad} f(x,y) = \begin{pmatrix} 2x \\ 6y \end{pmatrix} \qquad \operatorname{grad} h(x,y) = \begin{pmatrix} 2x \\ -1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \operatorname{grad} f(x,y) + \lambda \operatorname{grad} h(x,y) = 0 \wedge h(x,y) = 0$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} 2x + \lambda 2x \\ 6y - \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge x^2 - y - 2 = 0$

1. Fall: $x = 0 \Rightarrow y = -2, \ \lambda = -12$

2. Fall: $x \neq 0 \Rightarrow \lambda = -1 \wedge y = -\frac{1}{6} \wedge x = \pm\sqrt{\frac{11}{6}}$

$K_1 = (0, -2) \qquad f(K_1) = 8$

$K_2 = \left(\sqrt{\frac{11}{6}}, -\frac{1}{6}\right) \qquad f(K_2) = \frac{11}{6} + \frac{1}{12} - 4 = \frac{22 + 1 - 48}{12} = \frac{-25}{12}$

$K_3 = \left(-\sqrt{\frac{11}{6}}, -\frac{1}{6}\right) \qquad f(K_3) = -\frac{25}{12}$