Extremalstellen

Buch Kap. 5.13

Satz 5.11: Extremalstellen

Ist $\mathbf{x}_0 \in \mathring{D}$ lokale Extremalstelle einer partiell differenzierbaren Funktion $f : D \to \mathbb{R},\ D \subset \mathbb{R}^n$, so gilt $f'(x) = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} f(x) \ \dots \ \frac{\partial}{\partial x_n} f(x)\right) \in \mathbb{R}^{1 \times n}$

$$f'(\mathbf{x}_0) = \mathbf{0}, \iff \operatorname{grad} f(x_0) = 0$$

d.h. sämtliche partiellen Ableitungen von f verschwinden. (mit $\mathring{D}$ werden die inneren Punkte von D bezeichnet).
Ist f zweimal stetig partiell differenzierbar, so ist $H_f(x_0)$ negativ semidefinit, falls x_0 lokale Maximalstelle, positiv semidefinit, falls x_0 lokale Minimalstelle.

Extremalstellen

Buch Kap. 5.13

Definition 5.33: Lokale Extremalstellen

Es sei $f : D \to \mathbb{R},\ D \subset \mathbb{R}^n$ gegeben. Ist $\mathbf{x}_0 \in D$ ein Punkt, zu dem es eine Umgebung U mit

$$f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{x}_0) \qquad \text{für alle} \quad \mathbf{x} \in U \cap D,\ \mathbf{x} \neq \mathbf{x}_0,$$

gibt, so sagt man: f besitzt in $\mathbf{x}_0$ ein lokales oder relatives Maximum. Der Punkt $\mathbf{x}_0$ selbst heißt eine lokale Maximalstelle von f. Steht "$<$" statt "$\leq$", wird $\mathbf{x}_0$ als **echte** lokale Maximalstelle von f bezeichnet.

Extremalstellen

Buch Kap. 5.13

Satz 5.12: hinreichende Extremalbedingungen

Ist $f : D \to \mathbb{R},\ D \subset \mathbb{R}^n$ zweimal stetig partiell differenzierbar, so folgt:
Ein Punkt $\mathbf{x}_0 \in \mathring{D}$ mit $f'(\mathbf{x}_0) = \mathbf{0}$ ist

- eine echte lokale Maximalstelle, falls $H_f(\mathbf{x}_0)$ negativ definit,
- eine echte lokale Minimalstelle, falls $H_f(\mathbf{x}_0)$ positiv definit,
- keine lokale Extremalstelle, falls $H_f(\mathbf{x}_0)$ indefinit,

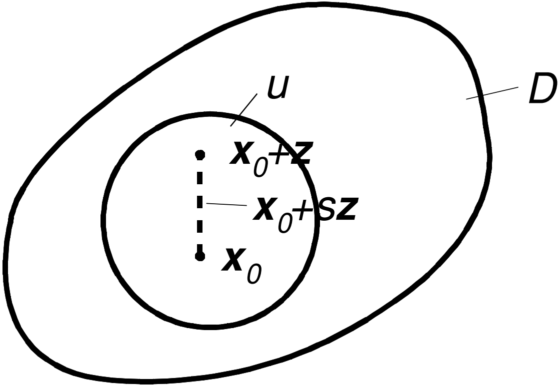

Abbildung 5.21: Zum Beweis von Satz 5.12

Extremalstellen

Satz 5.13: hinreichende Extremalbedingungen

Ist $f : D \to \mathbb{R},\; D \subset \mathbb{R}^n$ zweimal stetig partiell differenzierbar, so folgt:
Ein Punkt $\mathbf{x}_0 \in \mathring{D}$ mit $f'(\mathbf{x}_0) = \mathbf{0}$ ist eine

a) echte lokale Maximalstelle, falls die Eigenwerte der HESSE−Matrix $H_f(\mathbf{x}_0)$ alle negativ sind,

b) echte lokale Minimalstelle, falls die Eigenwerte der HESSE−Matrix $H_f(\mathbf{x}_0)$ alle positiv sind.

Extremalstellen

Beispiele

$$f(x,y) = \sin(x)\cdot\sin(y) \qquad D = \mathbb{R}^2$$

$$\operatorname{grad} f(x,y) = \begin{pmatrix} \cos(x)\sin(y) \\ \sin(x)\cos(y) \end{pmatrix} \qquad H_f(x,y) = \begin{pmatrix} -\sin(x)\sin(y) & \cos(x)\cos(y) \\ \cos(x)\cos(y) & -\sin(x)\sin(y) \end{pmatrix}$$

$$\operatorname{grad} f(x,y) = 0 \iff \cos(x)\sin(y) = 0 \;\wedge\; \sin(x)\cos(y) = 0$$

$$\iff (\cos(x) = 0 \vee \sin(y) = 0) \wedge (\sin(x) = 0 \vee \cos(y) = 0)$$

$$\iff (\cos(x) = 0 \wedge \cos(y) = 0) \vee (\sin(y) = 0 \wedge \sin(x) = 0)$$

$$\iff a)\; x = \frac{2n+1}{2}\pi \wedge y = \frac{2m+1}{2}\pi \quad \text{für } n,m \in \mathbb{Z}$$

$$\vee\; b)\; x = n\pi \wedge y = m\pi \quad \text{für } n,m \in \mathbb{Z}$$

Beispiele

a) $x = \frac{2n+1}{2}\pi$, $y = \frac{2m+1}{2}\pi$

$$\Rightarrow H_f(x,y) = \begin{pmatrix} -\underbrace{\sin\left(\frac{2n+1}{2}\pi\right)}_{=(-1)^n}\underbrace{\sin\left(\frac{2m+1}{2}\pi\right)}_{=(-1)^m} & \underbrace{\cos\left(\frac{2n+1}{2}\pi\right)\cos\left(\frac{2m+1}{2}\pi\right)}_{=0} \\ \underbrace{\cos\left(\frac{2n+1}{2}\pi\right)\cos\left(\frac{2m+1}{2}\pi\right)}_{=0} & -\underbrace{\sin\left(\frac{2n+1}{2}\pi\right)}_{(-1)^n}\underbrace{\sin\left(\frac{2m+1}{2}\pi\right)}_{(-1)^m} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} (-1)^{n+m+1} & 0 \\ 0 & (-1)^{n+m+1} \end{pmatrix} = (-1)^{n+m+1} I_2$$

pos. def $\Leftrightarrow$ $n+m$ ungerade, neg. def. $\Leftrightarrow$ $n+m$ gerade

Extremalstellen

Buch Kap. 5.13

Beispiele

Also lok. Max. bei $(x,y) = \left(\frac{2n+1}{2}\pi, \frac{2m+1}{2}\pi\right)$ mit $n,m \in \mathbb{Z}$
und $n+m$ gerade

sowie lok. Min. bei $(x,y) = \left(\frac{2n+1}{2}\pi, \frac{2m+1}{2}\pi\right)$ mit $n,m \in \mathbb{Z}$ und
$n+m$ ungerade

b) $(x,y) = (n\pi, m\pi)$

$$\Rightarrow H_f(x,y) = \begin{pmatrix} -\sin(n\pi)\sin(m\pi) & \cos(n\pi)\cos(m\pi) \\ \cos(n\pi)\cos(m\pi) & -\sin(n\pi)\sin(m\pi) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & (-1)^{n+m} \\ (-1)^{n+m} & 0 \end{pmatrix} \text{ indefinit}$$

$\Rightarrow$ kein lok. Extr. in $(n\pi, m\pi)$

Beispiele

$f(x,y) = x^2 + y^2$

$\operatorname{grad} f = 0 \iff x=0 \wedge y=0$

$H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} > 0$

$\Rightarrow$ lok. Min.

$f(x,y) = x^4 + y^4$

$\operatorname{grad} f(x,y) = 0 \iff x=0 \wedge y=0$

$H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, ist aber trotzdem lok. Min.

$f(x,y) = x^2 - y^2$

$\operatorname{grad} f(x,y) = 0 \iff x=0 \wedge y=0$

$H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ indef.

Extremalstellen

Satz 5.14: hinreichende Extremalbedingungen in $\mathbb{R}^2$

Ist die reellwertige Funktion $f : D \to \mathbb{R},\ D \subset \mathbb{R}^2$, zweimal stetig partiell differenzierbar auf $D \subset \mathbb{R}^2$. Dann gilt:
Ein Punkt $\mathbf{x}_0 = \binom{x_0}{y_0} \in \mathring{D}$ mit

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$$

und

$$f_{xx} f_{yy} - f_{xy}^2 > 0 \quad \text{in} \quad \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

ist eine

a) echte lokale Maximalstelle, falls $f_{xx}(x_0, y_0) < 0$ gilt,

b) echte lokale Minimalstelle, falls $f_{xx}(x_0, y_0) > 0$ gilt.

Extremalstellen

Buch Kap. 5.13

Beispiele

$f(x,y) = x^4 - y^2$ $\quad$ $\operatorname{grad} f(x,y) = 0 \iff x = 0 \wedge y = 0$

Sattelpunkt bei $(0,0)$ $\quad$ $H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ neg. semidef

$\rightsquigarrow$ keine Aussage

$f(x,y) = x^4 + y^2$ $\quad$ lok. Min bei 0, $\quad$ $H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \geq 0$

$f(x,y) = x^2$ $\quad$ lok. Min bei $(0,y)$ $\forall y \in \mathbb{R}$, $\quad$ $H_f(0,y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

„Talrücken"

Halfpipe: $\quad f(x,y) = 1 - \sqrt{1-x^2}$, $\quad D = \{(x,y) : x \in [-1,1]\}$

halber Donut: $\quad f(x,y) = \sqrt{1 - (\sqrt{x^2+y^2} - 1)^2}$ $\quad D = \{(x,y) : \sqrt{x^2+y^2} \leq 2\}$

Extremalstellen

Buch Kap. 5.13

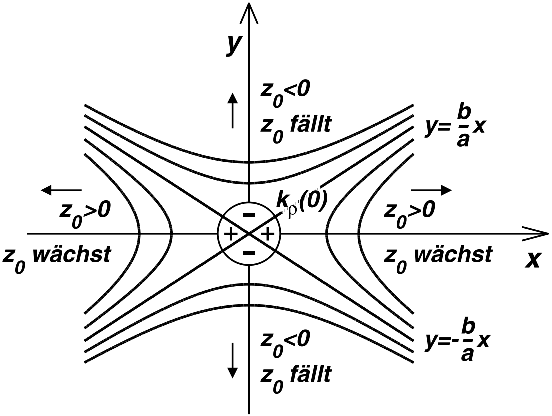

Abbildung 5.22: Sattelpunkt $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ der Fläche $z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$