TAYLOR−Formel in $\mathbb{R}^n$

Buch Kap. 5.11

Multi-Indizes

Für ein n-Tupel $\alpha = (\alpha_l, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}_0^n$ sei

$$\begin{aligned} |\alpha| &:= \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n, \\ \alpha! &:= \alpha_1! \cdot \alpha_2! \cdot \cdots \cdot \alpha_n!, \\ h^\alpha &:= h_1^{\alpha_1} \cdot h_2^{\alpha_2} \cdot \cdots \cdot h_n^{\alpha_n}. \end{aligned}$$

Ist f eine $|\alpha|$-mal stetig differenzierbare Funktion, so setzt man

$$\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial^\alpha \mathbf{x}} f := \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial^{\alpha_1} x_1 \cdots \partial^{\alpha_n} x_n} f.$$

Multi-Indizes, Beispiele

TAYLOR–Formel in $\mathbb{R}^n$

Buch Kap. 5.11

Satz 5.6: TAYLOR–Formel in $\mathbb{R}^n$

Die Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ mit $D \subset \mathbb{R}^n$ offen sei $(p+1)$–mal stetig partiell differenzierbar, und die Strecke $[\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_0 + \mathbf{h}]$ von $\mathbf{x}_0$ und $\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}$ liege komplett in D. Dann gilt die TAYLOR-Formel

$$f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) = \underbrace{\sum_{|\alpha| \le p} \frac{\frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial^\alpha x}(\mathbf{x}_0)}{\alpha!} \cdot \mathbf{h}^\alpha}_{\text{Taylor-Polynom } T_p(x)} + R(\mathbf{x}_0, \mathbf{h})$$

mit dem Restglied

$$R(\mathbf{x}_0, \mathbf{h}) = \sum_{|\alpha| = p+1} \frac{\frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial^\alpha x}(\mathbf{x}_0 + \theta \mathbf{h})}{\alpha!} \cdot \mathbf{h}^\alpha \,.$$

TAYLOR–Formel in $\mathbb{R}^n$

Buch Kap. 5.11

Definition 5.32: TAYLOR–Polynom

Die Funktion $f : D \to \mathbb{R},\ D \subset \mathbb{R}^n$ sei $(p+1)$–mal stetig partiell differenzierbar, und $[\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_0 + \mathbf{h}]$ sei eine im Inneren von D liegende Strecke. Dann heißt

$$T_p(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) := \sum_{|\alpha| \le p} \frac{\frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial^\alpha x}(\mathbf{x}_0)}{\alpha!} \cdot \mathbf{h}^\alpha$$

TAYLOR–Polynom p–ten Grades der Funktion $f(\mathbf{x})$ zum Entwicklungspunkt $\mathbf{x}_0$.

Beispiele

$$f(x,y) = \sin(x)\ \sin(y) \quad , \quad (x_0,y_0) = (0,0)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x,y) = \cos(x)\sin(y) \qquad \frac{\partial}{\partial y} f(x,y) = \sin(x)\cos(y)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} f(x,y) = \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} f(x,y) = \cos(x)\cos(y)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x,y) = -\sin(x)\sin(y) \qquad \frac{\partial^2}{\partial y^2} f(x,y) = -\sin(x)\sin(y)$$

$$\frac{\partial^3}{\partial x^3} f(x,y) = -\cos(x)\sin(y) \qquad \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial y} f(x,y) = -\sin(x)\cos(y)$$

$$\frac{\partial^3}{\partial x \partial y^2} f(x,y) = -\cos(x)\sin(y) \qquad \frac{\partial^3}{\partial y^3} f(x,y) = -\sin(x)\cos(y)$$

$$|\alpha| = 4 \qquad \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x^{\alpha_1} \partial y^{\alpha_2}} f(x,y) = \text{"} \pm \sin/\cos(x) \cdot \sin/\cos(y) \text{"}$$

$$\Rightarrow \left| \frac{\partial^4}{\partial x^{\alpha_1} \partial x^{\alpha_2}} f(x,y) \right| \leq 1$$

Beispiele

$$(x_0,y_0)=(0,0)$$

$$
\begin{aligned}
T_3(x,y) = {}& \underbrace{\cancel{\frac{f(0,0)}{(0,0)!}(x,y)^{(0,0)}}}_{=0} + \underbrace{\cancel{\frac{\frac{\partial}{\partial x} f(0,0)}{(1,0)!}(x,y)^{(1,0)}}}_{=0} + \underbrace{\cancel{\frac{\frac{\partial}{\partial y} f(0,0)}{(0,1)!}(x,y)^{(0,1)}}}_{=0} \\
& + \underbrace{\cancel{\frac{\frac{\partial^2}{\partial x^2} f(0,0)}{(2,0)!}(x,y)^{(2,0)}}}_{=0} + \frac{\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \overbrace{f(0,0)}^{=1}}{\underbrace{(1,1)!}_{=1}} \underbrace{(x,y)^{(1,1)}}_{= xy} + \underbrace{\cancel{\frac{\frac{\partial^2}{\partial y^2} f(0,0)}{(0,2)!}(x,y)^{(0,2)}}}_{=0} \\
& + \underbrace{\cancel{\frac{\frac{\partial^3}{\partial x^3} f(0,0)}{(3,0)!}(x,y)^{(3,0)}}}_{=0} + \underbrace{\cancel{\frac{\frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial y} f(0,0)}{(2,1)!}(x,y)^{(2,1)}}}_{=0} + \underbrace{\cancel{\frac{\frac{\partial^3}{\partial x \partial y^2} f(0,0)}{(1,2)!}(x,y)^{(1,2)}}}_{=0} \\
& + \underbrace{\cancel{\frac{\frac{\partial^3}{\partial y^3} f(0,0)}{(0,3)!}(x,y)^{(0,3)}}}_{=0} = xy
\end{aligned}
$$

$$\left|R_4((0,0),(x,y))\right| \le \sum_{|\alpha|=4} \underbrace{\left|\frac{\partial}{\partial x^{\alpha_1}\partial y^{\alpha_2}} f(\theta x,\theta y)\right|}_{\le 1} |x|^{\alpha_1}|y|^{\alpha_2} \le \sum_{|\alpha|=4} |x|^{\alpha_1}|y|^{\alpha_2}$$

Beispiele

$$= |x|^4 + |x|^3|y| + |x|^2|y|^2 + |x||y|^3 + |y|^4$$

Bsp: $f(x,y) = e^{2x+y^2}$ $\qquad (x_0, y_0) = (0,0)$

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x,y) = 2\, e^{2x+y^2}, \quad \frac{\partial}{\partial y} f(x,y) = 2y\, e^{2x+y^2}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x,y) = 4\, e^{2x+y^2}, \quad \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} f(x,y) = 4y\, e^{2x+y^2}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} f(x,y) = 2\, e^{2x+y^2} + 4y^2\, e^{2x+y^2} = 2(1+2y^2)\, e^{2x+y^2}$$

$$T_2(x,y) = f(0,0) + \frac{\frac{\partial}{\partial x} f(0,0)}{1} x + \frac{\frac{\partial}{\partial y} f(0,0)}{1} y + \frac{\frac{\partial^2}{\partial x^2} f(0,0)}{2} x^2$$

$$+ \frac{\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} f(0,0)}{1} xy + \frac{\frac{\partial^2}{\partial y^2} f(0,0)}{2} y^2 = 1 + 2x + 2x^2 + y^2$$

Mittelwertsatz

$|a \cdot b| \leq |a| \cdot |b|$

Satz 5.7: Mittelwertsatz

Ist $f : D \to \mathbb{R},\ D \subset \mathbb{R}^n$ einmal stetig partiell differenzierbar, und ist $[\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_0 + \mathbf{h}]$ eine im Inneren von D liegende Strecke. Dann gibt es eine Zahl θ mit $0 < \theta < 1$, so dass

$$\begin{aligned}|f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) - f(\mathbf{x_0})| = |h_1 f_{x_1}(\mathbf{x}_0 + \theta\mathbf{h}) + h_2 f_{x_2}(\mathbf{x}_0 + \theta\mathbf{h}) + \dots \\ \dots + h_n f_{x_n}(\mathbf{x}_0 + \theta\mathbf{h})|. \\ = |h \cdot \operatorname{grad}(x_0 + \theta h)| \leq |h| \cdot |\operatorname{grad}(x_0 + \theta h)| \\ \leq |h| \cdot \max_{0 \leq s \leq 1} |\operatorname{grad}(x_0 + s h)|\end{aligned}$$

Es gilt die Abschätzung

$$|f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) - f(\mathbf{x}_0)| \leq |\mathbf{h}| \max_{0 \leq s \leq 1} \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |f_{x_i}(\mathbf{x}_0 + s\mathbf{h})|^2}\ .$$

Mittelwertsatz

Beispiele

Quadratische Approximation

Buch Kap. 5.11

Vorüberlegung

$$f(x_1+h_1, x_2+h_2, \ldots, x_n+h_n)$$

$$= f(x_1,\ldots,x_n) + \frac{\partial}{\partial x_1} f(x_1,\ldots,x_n)\cdot h_1 + \ldots + \frac{\partial}{\partial x_n} f(x_1,\ldots,x_n)\, h_n$$

$$\frac{\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} f(x_1,\ldots,x_n)}{2} h_1^2 + \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} f(x_1,\ldots,x_n)\cdot h_1 h_2 + \ldots + \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_n} f(x_1,\ldots,x_n)\, h_1 h_n$$

$$\frac{\frac{\partial^2}{\partial x_2^2} f(x_1,\ldots,x_n)}{2} h_2^2 + \frac{\partial^2}{\partial x_2 \partial x_3} f(x_1,\ldots,x_n)\, h_2 h_3 + \ldots + \frac{\partial^2}{\partial x_2 \partial x_n} f(x_1,\ldots,x_n)\, h_2 h_n$$

$$+ \ldots + \frac{\frac{\partial^2}{\partial x_{n-1}^2} f(x_1,\ldots,x_n)}{2} h_{n-1}^2 + \frac{\partial^2}{\partial x_{n-1} \partial x_n} f(x_1,\ldots,x_n)\, h_{n-1} h_n$$

$$+ \frac{\frac{\partial^2}{\partial x_n^2} f(x_1,\ldots,x_n)}{2} h_n^2 + R$$

Quadratische Approximation

Buch Kap. 5.11

Vorüberlegung

$$= f(x_1,\dots,x_n) + h \cdot \operatorname{grad} f(x_1,\dots,x_n)$$

$$+\frac{1}{2}\Big(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} f(\dots)\, h_1^2 + \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} f(\dots)\, h_1 h_2 + \dots\dots + \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_n} f(\dots)\, h_1 h_n$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x_2 \partial x_1} f(\dots)\, h_2 h_1 + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} f(\dots)\, h_2^2 + \dots\dots + \frac{\partial^2}{\partial x_2 \partial x_n} f(\dots)\, h_2 h_n$$

$$\vdots$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x_n \partial x_1} f(\dots)\, h_n h_1 + \dots\dots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2} f(\dots)\, h_n^2 \Big) + R$$

$$\| $$

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix} \cdot \left(\begin{pmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} f & \dots & \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_n} f \\ \vdots & & \\ \frac{\partial^2}{\partial x_n \partial x_1} f & \dots & \frac{\partial^2}{\partial x_n^2} f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix} \right)$$

Quadratische Approximation

Buch Kap. 5.11

Satz 5.8: Quadratische Approximation

Das TAYLOR-Polynom zweiten Grades einer Funktion f an der Stelle $\mathbf{x}_0$ kann man in der Form

$$T_2(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}_0) + \operatorname{grad} f(\mathbf{x}_0) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) + \frac{1}{2}\underbrace{(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)}_{=h}{}^T H_f(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)$$

darstellen, wobei H_f die HESSE−Matrix der Funktion f bezeichnet.

$$\underbrace{\begin{pmatrix} h_1 & \cdots & h_n \end{pmatrix}}_{1\times n} \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} f & \cdots & \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_n} f \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial^2}{\partial x_n \partial x_1} f & \cdots & \frac{\partial^2}{\partial x_n^2} f \end{pmatrix}}_{n\times n} \underbrace{\begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix}}_{n\times 1} = 1\times 1$$

Quadratische Approximation

Beispiele

$$f(x,y) = \sin(x)\sin(y), \quad \operatorname{grad} f(x,y) = \begin{pmatrix} \cos(x)\sin(y) \\ \sin(x)\cos(y) \end{pmatrix} \quad \operatorname{grad} f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} -\sin(x)\sin(y) & \cos(x)\cos(y) \\ \cos(x)\cos(y) & -\sin(x)\sin(y) \end{pmatrix} \Rightarrow H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$f(x,y) \approx f(0,0) + (x \;\; y)\operatorname{grad} f(0,0) + \frac{1}{2}(x \;\; y)\, H_f(0,0) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2} (x \;\; y) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{2} (x \;\; y) \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix} = xy$$

Quadratische Approximation

Buch Kap. 5.11

Beispiele

Extrema mit und ohne Nebenbedingungen

LA Wiederholung

Buch Kap. 5.13

(Semi-)definite Matrizen

- Eine Matrix $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ heißt symmetrisch, wenn $P = P^\top$.
- Eine symmetrische Matrix $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ heißt positiv definit, wenn $x^\top P x > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.
- Eine symmetrische Matrix $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ heißt positiv semidefinit, wenn $x^\top P x \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$.
- Eine symmetrische Matrix $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ heißt negativ definit, wenn $-P$ positiv definit ist.
- Eine symmetrische Matrix $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ heißt negativ semidefinit, wenn $-P$ positiv semidefinit ist.
- Eine symmetrische Matrix $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ heißt indefinit, wenn P weder positiv noch negativ semidefinit ist.

LA Wiederholung

Buch Kap. 5.13

Charakterisierung positiv definiter Matrizen

Gegeben sei eine symmetrische Matrix $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

- P ist positiv definit.
- Alle Eigenwerte von P sind positiv.
- Alle Hauptabschnittsdeterminanten $\det(P_k)$ sind positiv.
- P ist positiv semidefinit und $\ker P \neq \{0\}$.

LA Wiederholung

Buch Kap. 5.13

Charakterisierung positiv semidefiniter Matrizen

Gegeben sei eine symmetrische Matrix $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

- P ist positiv semidefinit.
- Alle Eigenwerte von P sind nichtnegativ.
- Alle Hauptabschnittsdeterminanten $\det(P_k)$ sind nichtnegativ.

LA Wiederholung

Buch Kap. 5.13

Charakterisierung negativ definiter Matrizen

Gegeben sei eine symmetrische Matrix $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

- P ist negativ definit.
- Alle Eigenwerte von P sind negativ.
- Die Hauptabschnittsdeterminanten $\det(P_k)$ sind abwechselnd negativ und positiv.

LA Wiederholung

Buch Kap. 5.13

Charakterisierung negativ semidefiniter Matrizen

Gegeben sei eine symmetrische Matrix $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

- P ist negativ semidefinit.
- Alle Eigenwerte von P sind nichtpositiv
- Die Hauptabschnittsdeterminanten $\det(P_k)$ abwechselnd nichtpositiv und nichtnegativ.

LA Wiederholung

Buch Kap. 5.13

Charakterisierung indefiniter Matrizen

Gegeben sei eine symmetrische Matrix $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

- P ist indefinit.
- P hat mindestens einen positiven Eigenwert und mindestens einen ~~positiven~~ Eigenwert.

negativen

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \det(\lambda I_2 - P) = \lambda^2 - 1$$