Differenzierbarkeit

Buch Kap. 5.7

Definition 5.28: Differenzierbarkeit

Eine Abbildung $\mathbf{f} : D \to \mathbb{R}^m,\ D \subset \mathbb{R}^n$, heißt in einem inneren Punkt $\mathbf{x}_0$ von D differenzierbar, falls sie in $\mathbf{x}_0$ partiell differenzierbar ist und in der Form

$$\underline{\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{x}_0) + \mathbf{f}'(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) + \mathbf{k}(\mathbf{x})}$$

geschrieben werden kann, wobei $\mathbf{f}'(\mathbf{x}_0) \in \mathbb{R}^{m\times n}$ und $\mathbf{k} : D \to \mathbb{R}^m$ eine Abbildung ist, für die

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} \frac{|\mathbf{k}(\mathbf{x})|}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|} = 0$$

gilt.

$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$
$+ \text{Rest}(x)$

$\frac{|\text{Rest}(x)|}{x - x_0} \xrightarrow[x\to x_0]{} 0$

$\mathbf{f}$ heißt differenzierbar in $A \subset D$, falls $\mathbf{f}$ in jedem Punkt von A differenzierbar ist. Im Falle $A = D$ heißt $\mathbf{f}$ eine differenzierbare Abbildung.

Beispiele

Differenzierbarkeit versus partielle Differenzierbarkeit

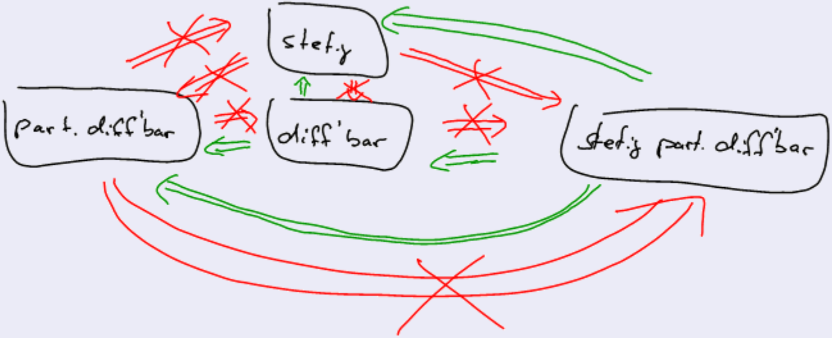
Buch Kap. 5.7

Satz 5.4: Differenzierbarkeit versus partielle Differenzierbarkeit

Sei $\mathbf{f} : D \to \mathbb{R}^m$ mit $D \subset \mathbb{R}^n$ offen.

- Wenn $\mathbf{f} : D \to \mathbb{R}^m,\ D \subset \mathbb{R}^n$ differenzierbar in $\mathbf{x}_0$ ist, dann ist $\mathbf{f}$ auch stetig in $\mathbf{x}_0$.
- Wenn $\mathbf{f} : D \to \mathbb{R}^m,\ D \subset \mathbb{R}^n$ differenzierbar in $\mathbf{x}_0$ ist, dann ist $\mathbf{f}$ auch partiell differenzierbar. In dem Fall ist die Ableitung gleich der JACOBI-Matrix, also
$$J_{\mathbf{f}}(\mathbf{x}_0) = \mathbf{f}'(\mathbf{x}_0).$$
- Ist $\mathbf{f}$ stetig partiell differenzierbar in einer Umgebung von in $\mathbf{x}_0$, so ist $\mathbf{f}$ differenzierbar in $\mathbf{x}_0$.

Beispiele



Differentiationsregeln

Buch Kap. 5.8

Differentiationsregeln

(i) Linearität
Sind $\mathbf{f} : D \to \mathbb{R}^m$ und $\mathbf{g} : D \to \mathbb{R}^m$, $D \subset \mathbb{R}^n$, differenzierbar in $\mathbf{x}_0$, so ist auch $\lambda\mathbf{f} + \mu\mathbf{g}$ (λ und μ reell) in $\mathbf{x}_0$ differenzierbar und es gilt

$$(\lambda\mathbf{f} + \mu\mathbf{g})'(\mathbf{x}_0) = \lambda\mathbf{f}'(\mathbf{x}_0) + \mu\mathbf{g}'(\mathbf{x}_0) \ .$$

(ii) Kettenregel
Es sei $\mathbf{h} : C \to D$, (mit $C \subset \mathbb{R}^n$, $D \subset \mathbb{R}^p$) differenzierbar in $\mathbf{x}_0 \in C$ und $\mathbf{f} : D \to \mathbb{R}^m$ differenzierbar im Punkt $\mathbf{z}_0 = \mathbf{h}(\mathbf{x}_0)$.
Dann ist auch $\mathbf{f} \circ \mathbf{h} : C \to \mathbb{R}^m$ in $\mathbf{x}_0$ differenzierbar und es gilt

$$(\mathbf{f} \circ \mathbf{h})'(\mathbf{x}_0) = \mathbf{f}'(\mathbf{z}_0)\mathbf{h}'(\mathbf{x}_0) = \underbrace{f'(h(x_0))}_{\in \mathbb{R}^{m\times p}} \cdot \underbrace{h'(x_0)}_{\in \mathbb{R}^{p\times n}} \in \mathbb{R}^{m\times n}$$

(iii) Produktregel $f, g : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^n$

$$(f \cdot g)'(x_0) = \underbrace{g(x_0)}_{\in \mathbb{R}} \underbrace{f'(x_0)}_{\in \mathbb{R}^{1\times n}} + \underbrace{f(x_0)}_{\in \mathbb{R}} \underbrace{g'(x_0)}_{\in \mathbb{R}^{1\times n}}$$

Kettenregel

Buch Kap. 5.8

$$
\begin{tikzcd}
\mathbb{R}^n \arrow[rr, "f \circ h"] \arrow[dr, "h"'] & & \mathbb{R}^m \\
& \mathbb{R}^p \arrow[ur, "f"'] &
\end{tikzcd}
$$

x_0

$z_0 = h(x_0)$

$$f(z_0) = f(h(x_0)) = f \circ h(x_0)$$

Abbildung 5.18: Verkettete Abbildungen (Kettenregel)

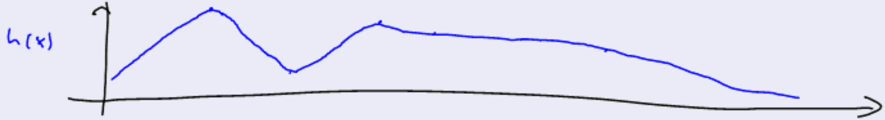
Differentiationsregeln

Buch Kap. 5.7

Beispiele

a) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Betrachte Fktn $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $h(x) = f(x, g(x))$



Differentiationsregeln

Beispiele

$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x_1, x_2)$

$h(x) = f(x, g(x))$

Betrachte „Hilfsfunktion" $\tilde{g}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $\tilde{g}(x) = \begin{pmatrix} x \\ g(x) \end{pmatrix} = (x, g(x))$

Es gilt $f(\tilde{g}(x)) = f(x, g(x)) = h(x)$, also $h = f \circ \tilde{g}$

$\tilde{g}'(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} x \\ \frac{\partial}{\partial x} g(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ g'(x) \end{pmatrix}$ $\quad f'(x) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x) \;\; \frac{\partial f}{\partial x_2}(x) \right)$ $\quad x = (x_1, x_2)$

$h'(x) = (f \circ \tilde{g})'(x) = \underbrace{f'(\tilde{g}(x))}_{\in \mathbb{R}^{1 \times 2}} \cdot \underbrace{\tilde{g}'(x)}_{\in \mathbb{R}^{2 \times 1}} = f'(x, g(x)) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ g'(x) \end{pmatrix}$

$= \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x, g(x)) \;\; \frac{\partial f}{\partial x_2}(x, g(x)) \right) \begin{pmatrix} 1 \\ g'(x) \end{pmatrix} = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x, g(x)) + \frac{\partial f}{\partial x_2}(x, g(x)) \cdot g'(x)$

Richtungsableitung

Buch Kap. 5.8

Definition 5.29: Richtungsableitung

Seien $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subset R^n$ und ein Vektor $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ mit $|\mathbf{a}| = 1$ gegeben. Existiert der Grenzwert

$$\lim_{t\to 0} \frac{1}{t}[f(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{a}) - f(\mathbf{x}_0)] ,$$

dann nennt man

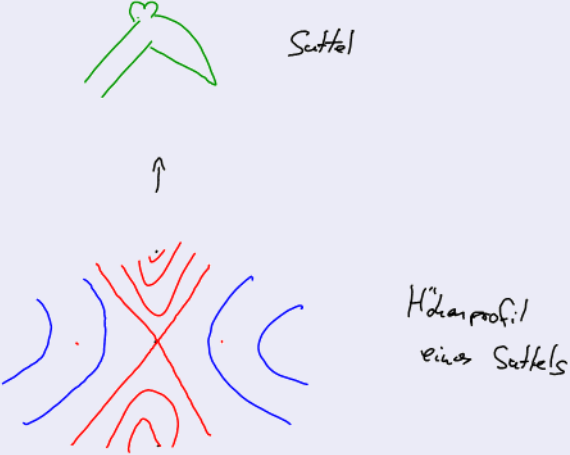
$$\underline{\frac{\partial f}{\partial \mathbf{a}}(\mathbf{x}_0)} := \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}[f(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{a}) - f(\mathbf{x}_0)]$$

die Richtungsableitung der Funktion f an der Stelle $\mathbf{x}_0$ in Richtung $\mathbf{a}$.

Richtungsableitung

Buch Kap. 5.8

Beispiele



Richtungsableitung

Buch Kap. 5.8

Satz 5.5: Richtungsbleitung und Gradient

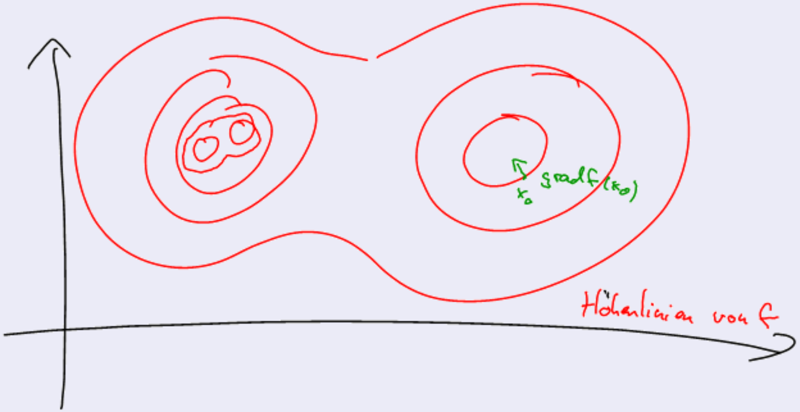
Sind die partiellen Ableitungen von f in $\mathbf{x}_0$ stetig (woraus die Differenzierbarkeit von f in $\mathbf{x}_0$ folgt), dann gilt für die Richtungsableitung von f in Richtung $\mathbf{a}$

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{a}}(\mathbf{x}_0) = \operatorname{grad} f(\mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{a} \ .$$

Richtungsableitung

Buch Kap. 5.8

Beispiele



TAYLOR−Formel in $\mathbb{R}^n$

Multi-Indizes

Für ein n-Tupel $\alpha = (\alpha_l, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}_0^n$ sei

$$|\alpha| := \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n,$$
$$\alpha! := \alpha_1! \cdot \alpha_2! \cdot \cdots \cdot \alpha_n!.$$

Ist f eine $|\alpha|$-mal stetig differenzierbare Funktion, so setzt man

$$\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial^{\alpha}\mathbf{x}} f := \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial^{\alpha_1} x_1 \cdots \partial^{\alpha_n} x_n} f.$$

Multi-Indizes, Beispiele

a) $f(x_1,x_2,x_3) = x_1 e^{x_2+x_3}$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_3^2}(x_1,x_2,x_3) = x_1 e^{x_2+x_3}$$

$\alpha = (1,1,2)$

$$\frac{\partial^4 f}{\partial x^\alpha}(x_1,x_2,x_3) = \frac{\partial}{\partial x_1}\frac{\partial}{\partial x_2}\frac{\partial^2}{\partial x_3^2} f(x_1,x_2,x_3)$$

$$= \frac{\partial}{\partial x_1}\frac{\partial}{\partial x_2} x_1 e^{x_2+x_3} = \frac{\partial}{\partial x_1} x_1 e^{x_2+x_3}$$

$$= e^{x_2+x_3}$$

$\alpha = (0,1,2)$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^\alpha}(x_1,x_2,x_3) = \frac{\partial}{\partial x_2}\frac{\partial^2}{\partial x_3^2} f(x_1,x_2,x_3) = x_1 e^{x_2+x_3}$$

TAYLOR–Formel in $\mathbb{R}^n$

Satz 5.6: TAYLOR–Formel in $\mathbb{R}^n$

Die Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ mit $D \subset \mathbb{R}^n$ offen sei $(p+1)$–mal stetig partiell differenzierbar, und die Strecke $[\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_0 + \mathbf{h}]$ von $\mathbf{x}_0$ und $\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}$ liege komplett in D. Dann gilt die TAYLOR-Formel

$$f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) = \sum_{|\alpha| \le p} \frac{\frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial^\alpha x}(\cancel{a}\, x_0)}{\alpha!} \cdot \mathbf{h}^\alpha + R(\cancel{a}\, x_0, \mathbf{h})$$

mit dem Restglied

$$h^\alpha = h_1^{\alpha_1} \cdot h_2^{\alpha_2} \cdots h_n^{\alpha_n}$$

$$R(\cancel{a}\, x_0, \mathbf{h}) = \sum_{|\alpha| = p+1} \frac{\frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial^\alpha x}(\cancel{a}\, x_0 + \theta \mathbf{h})}{\alpha!} \cdot \mathbf{h}^\alpha, \quad \text{wobei } \theta \in [0,1]$$