Differenzierbarkeit im $\mathbb{R}^n$

Partielle Ableitungen

Definition 5.23: (partielle Differenzierbarkeit)

Sei die Funktion $f : D \to \mathbb{R},\ D \subset \mathbb{R}^n$, wobei D eine offene Menge ist, gegeben. Existiert der Grenzwert

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(\mathbf{x} + h\mathbf{e}_j) - f(\mathbf{x})}{h},$$

dann ist die Funktion f an der Stelle $\mathbf{x}$ **partiell differenzierbar nach x_j** und durch den Grenzwert

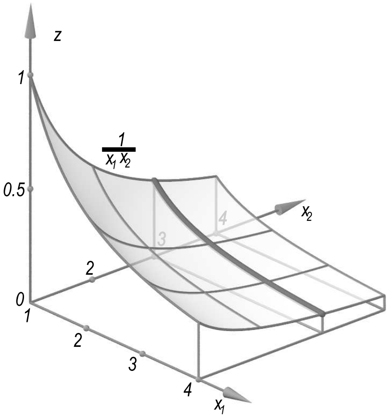
$$\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_j} := \lim_{h\to 0} \frac{f(\mathbf{x} + h\mathbf{e}_j) - f(\mathbf{x})}{h}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, \dots, x_n) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(f(x_1+h, x_2, \dots, x_n) - f(x_1, \dots, x_n)\right)$$

ist die **partielle Ableitung** nach x_j von f an der Stelle $\mathbf{x}$ definiert.

Partielle Ableitungen

Buch Kap. 5.5



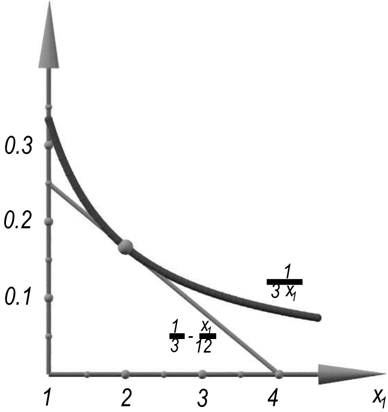


Abbildung 5.16: Graph von $f(x_1, x_2) = \frac{1}{x_1 x_2}$, Abbildung 5.17: Graph von $f^*(x_1) := f(x_1, 3) = \frac{1}{3x_1}$ einschließlich Tangente an f^*.

Partielle Ableitungen

Buch Kap. 5.5

Beispiele

a) $f(x,y) = \cos(x^2 + y^2)$

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x,y) = -2x \sin(x^2+y^2)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} f(x,y) = -2y \sin(x^2+y^2)$$

b) $f(x,y) = e^{3xy+y^2}$

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x,y) = 3y\, e^{3xy+y^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} f(x,y) = (3x+2y)\, e^{3xy+y^2}$$

Beispiele

c) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & : (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & : (x,y) = (0,0) \end{cases}$

Wir wissen: f ist unstetig in $(0,0)$

$(x,y) \neq (0,0)$:

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x,y) = \frac{y(x^2+y^2) - 2x^2y}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} f(x,y) = \frac{x(x^2+y^2) - 2xy^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$(0,0) = (x,y)$:

$$\frac{\partial}{\partial x} f(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \Big(\underbrace{f(h,0)}_{=0} - \underbrace{f(0,0)}_{=0} \Big) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial y} f(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \Big(\underbrace{f(0,h)}_{=0} - \underbrace{f(0,0)}_{=0} \Big) = 0$$

D.h. f ist part. diff'bar in $(0,0)$, jedoch nicht stetig in $(0,0)$

Partielle Ableitungen

Buch Kap. 5.5

Definition 5.24: (partielle Differenzierbarkeit)

$f : D \to \mathbb{R}$ ist auf $A \subset D$, A offen, partiell differenzierbar nach x_j, falls f in allen Punkten $\mathbf{x} \in A$ partiell nach x_j differenzierbar ist.
f ist partiell nach x_j differenzierbar, falls f auf D partiell nach x_j differenzierbar ist.
Für die partielle Ableitung nach x_j wird auch die Bezeichnung f_{x_j} verwendet.
f heißt partiell differenzierbar, falls alle partiellen Ableitungen existieren.

Partielle Ableitungen

Definition 5.25: (partielle Differenzierbarkeit)

$f : D \to \mathbb{R},\ \ D \subset \mathbb{R}^n$ offen, heißt in D stetig partiell differenzierbar, falls in D alle partiellen Ableitungen existieren und zugleich stetig sind.

Gradient

Gradient

Sei $f : D \to \mathbb{R},\ D \subset \mathbb{R}^n$ offen, f partiell differenzierbar.
Der Vektor

$$\operatorname{grad} f(\mathbf{x}) := \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{x}) \\ \frac{\partial f}{\partial x_2}(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{x}) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

heißt Gradient der Funktion f bei x.
Die Abbildung $\operatorname{grad} f : D \to \mathbb{R}^n$ ist eine vektorwertige Abbildung, d.h. jedem $\mathbf{x} \in D$ wird mit $\operatorname{grad} f(\mathbf{x})$ ein Vektor aus dem $\mathbb{R}^n$ zugeordnet.

Gradient

Beispiele

$$f(x,y) = e^{3xy+y^2}$$

$$\operatorname{grad} f(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3y\, e^{3xy+y^2} \\ (3x+2y)\, e^{3xy+y^2} \end{pmatrix}$$

Höhere partielle Ableitungen

Definition 5.26: (höhere partielle Ableitungen)

Sei $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^n$ offen, f partiell differenzierbar. Falls die partielle Ableitung

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)$$

existiert, heißt

$$f_{x_i x_j}(\mathbf{x}) := \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)(\mathbf{x})$$

zweite partielle Ableitung von f nach x_j und x_i.
Existieren alle zweiten partiellen Ableitungen $f_{x_i x_j}$ für $i, j = 1, 2, ..., n$, heißt f zweimal partiell differenzierbar.
Höhere partielle Ableitungen ($k-$te partielle Ableitungen oder auch partielle Ableitungen k-ter Ordnung) werden entsprechend rekursiv definiert;

$$\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \ldots \partial x_{i_k}}(x) =: f_{x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_k}}(x), \quad mit \quad 1 \leq k$$

Höhere partielle Ableitungen

Beispiele

$$f(x,y) = e^{3xy+y^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x,y) = 3y\, e^{3xy+y^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} f(x,y) = (3x+2y)\, e^{3xy+y^2}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x,y) = 9y^2\, e^{3xy+y^2}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y\,\partial x} f(x,y) = 3e^{3xy+y^2} + 3y(3x+2y)\, e^{3xy+y^2}$$

$$= (3+9xy+6y^2)\, e^{3xy+y^2}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y} f(x,y) = 3\, e^{3xy+y^2} + (3x+2y)\, 3y\, e^{3xy+y^2}$$

$$= (3+9xy+6y^2)\, e^{3xy+y^2},$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} f(x,y) = 2\, e^{3xy+y^2} + (3x+2y)(3x+2y)\, e^{3xy+y^2}$$

Höhere partielle Ableitungen

Satz 5.3: (höhere partielle Ableitungen)

Ist eine Funktion $f : D \to \mathbb{R},\ D \subset \mathbb{R}^n$, $p-$ mal stetig partiell differenzierbar, so ist

$$\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} ... \partial x_{i_k}} = f_{x_{i_1} x_{i_2} ... x_{i_k}}, \quad mit \quad 1 < k \leq p,$$

unabhängig von der Reihenfolge der $x_{i_1}, x_{i_2}, ..., x_{i_k}$. Die Indizes $i_1, i_2, ..., i_k$ sind dabei beliebige Elemente der Menge $\{1, 2, ..., n\}$.

Beispiele

Wenn f nicht stet. part. diff'bar, dann kann die Reihenfolge der part. Abl eine Rolle spielen

Bsp: $$f(x,y) = \begin{cases} xy\,\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & : (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & : (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$(x,y) \neq 0$: $$\frac{\partial}{\partial x} f(x,y) = y\,\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} + xy\,\frac{2x(x^2+y^2)-2x(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} f(x,y) = x\,\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} + xy\,\frac{-2y(x^2+y^2)-2y(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} f(0,y) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,y)-f(0,y)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{hy}{h}\,\frac{h^2-y^2}{h^2+y^2} = y \lim_{h\to 0} \frac{h^2-y^2}{h^2+y^2}$$
$$= -y$$

Beispiele

$$\frac{\partial}{\partial y} f(x,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x,h)-f(x,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{xh}{h}\,\frac{x^2-h^2}{x^2+h^2} = x.$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y} f(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{\partial}{\partial y} f(h,0) - \frac{\partial}{\partial y} f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h}{h} = 1$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y\,\partial x} f(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{\partial}{\partial x} f(0,h) - \frac{\partial}{\partial x} f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{-h}{h} = -1$$

Partielle Ableitungen

Definition 5.27: partielle Differenzierbarkeit für vektorwertige Funktionen

Sei $\mathbf{f} : D \to \mathbb{R}^m,\ D \subset \mathbb{R}^n$ offenen, $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} f_1(\mathbf{x}) \\ f_2(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ f_m(\mathbf{x}) \end{pmatrix}$.

f ist partiell differenzierbar in $\mathbf{x}_0 \in D$, partiell differenzierbar auf $A \subset D$ bzw. partiell differenzierbar, falls alle f_j $(j = 1, 2, \ldots, n)$ partiell differenzierbar in $\mathbf{x}_0 \in D$, partiell differenzierbar auf $A \subset D$ bzw. partiell differenzierbar sind.

Höhere partielle Ableitungen

Buch Kap. 5.5

Beispiele

Partielle Ableitungen

Buch Kap. 5.6

JACOBI-Matrix

Sei $\mathbf{f} : D \to \mathbb{R}^m$, $D \subset \mathbb{R}^n$, in $\mathbf{x}_0$ partiell differenzierbar, dann heißt die Matrix

$$J_{\mathbf{f}}(\mathbf{x}_0) := \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\mathbf{x}_0) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\mathbf{x}_0) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\mathbf{x}_0) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\mathbf{x}_0) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(\mathbf{x}_0) & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(\mathbf{x}_0) \\ \vdots & & & \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(\mathbf{x}_0) & \frac{\partial f_m}{\partial x_2}(\mathbf{x}_0) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(\mathbf{x}_0) \end{pmatrix}$$

JACOBI-Matrix bzw. Ableitungsmatrix oder einfach Ableitung von $\mathbf{f}$ in $\mathbf{x}_0$.

JACOBI-Matrix

Buch Kap. 5.6

Beispiele

$$f(x,y) = \begin{pmatrix} e^{3xy+y^2} \\ \cos(x^2+y^2) \\ x+y \end{pmatrix}$$

$$J_f(x,y) = \begin{pmatrix} 3y\,e^{3xy+y^2} & (3x+2y)\,e^{3xy+y^2} \\ -2x\sin(x^2+y^2) & -2y\sin(x^2+y^2) \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 2}$$

Partielle Ableitungen

Buch Kap. 5.6

Hesse-Matrix

Die **Hesse-Matrix** einer Funktion $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ist gegeben durch

$$H_f(\mathbf{x}) := \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1}(\mathbf{x}) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(\mathbf{x}) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(\mathbf{x}) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(\mathbf{x}) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_2}(\mathbf{x}) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n}(\mathbf{x}) \\ \vdots & & & \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(\mathbf{x}) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2}(\mathbf{x}) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_n}(\mathbf{x}) \end{pmatrix}.$$

HESSE-Matrix

Beispiele

$$f(x,y) = e^{3xy+y^2}$$

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 9y^2 & 3+9xy+6y^2 \\ 3+5xy+6y^2 & 2+9x^2+12xy+4y^2 \end{pmatrix} e^{3xy+y^2}$$

HESSE-Matrix

Buch Kap. 5.6

Beispiele

Differenzierbarkeit

Definition 5.28: Differenzierbarkeit

Eine Abbildung $\mathbf{f} : D \to \mathbb{R}^m,\ D \subset \mathbb{R}^n$, heißt in einem inneren Punkt $\mathbf{x}_0$ $\in \mathring{D}$ von D differenzierbar, falls sie ~~in $\mathbf{x}_0$ partiell differenzierbar ist und in~~ der Form

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{x}_0) + \mathbf{f}'(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) + \mathbf{k}(\mathbf{x})$$

geschrieben werden kann, wobei $\mathbf{f}'(\mathbf{x}_0) \in \mathbb{R}^{m \times n}$ und $\mathbf{k} : D \to \mathbb{R}^m$ eine Abbildung ist, für die

$$\lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{x}_0} \frac{|\mathbf{k}(\mathbf{x})|}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|} = 0$$

gilt.

$\mathbf{f}$ heißt differenzierbar in $A \subset D$, falls $\mathbf{f}$ in jedem Punkt von A differenzierbar ist. Im Falle $A = D$ heißt $\mathbf{f}$ eine differenzierbare Abbildung.

Beispiele

Differenzierbarkeit versus partielle Differenzierbarkeit

Buch Kap. 5.7

Satz 5.4: Differenzierbarkeit versus partielle Differenzierbarkeit

Sei $\mathbf{f} : D \to \mathbb{R}^m$ mit $D \subset \mathbb{R}^n$ offen.

- Wenn $\mathbf{f} : D \to \mathbb{R}^m,\ D \subset \mathbb{R}^n$ differenzierbar in $\mathbf{x}_0$ ist, dann ist $\mathbf{f}$ auch stetig in $\mathbf{x}_0$.
- Wenn $\mathbf{f} : D \to \mathbb{R}^m,\ D \subset \mathbb{R}^n$ differenzierbar in $\mathbf{x}_0$ ist, dann ist $\mathbf{f}$ auch partiell differenzierbar. In dem Fall ist die Ableitung gleich der JACOBI-Matrix, also
$$J_{\mathbf{f}}(\mathbf{x}_0) = \mathbf{f}'(\mathbf{x}_0).$$
- Ist $\mathbf{f}$ stetig partiell differenzierbar in einer Umgebung von in $\mathbf{x}_0$, so ist $\mathbf{f}$ differenzierbar in $\mathbf{x}_0$.

stet. part. diff'bar $\Rightarrow$ diff'bar $\Rightarrow$ stetig

$\Rightarrow$ part. diff'bar