Folgen im $\mathbb{R}^n$

Buch Kap. 5.1

(a_k) $\qquad$ $\mathbf{a}_k = \begin{pmatrix} a_{1k} \\ a_{2k} \\ \vdots \\ a_{nk} \end{pmatrix}$

Satz 5.1: (Limes in $\mathbb{R}^n$)

Der Grenzwert einer Folge im $\mathbb{R}^n$ existiert genau dann, wenn die Grenzwerte der Koordinatenfolgen existieren. Für den Grenzwert $\mathbf{a}_0$ der Folge $(\mathbf{a}_k)$ gilt dann

$$\mathbf{a}_0 = \lim_{k\to\infty} \mathbf{a}_k = \begin{pmatrix} \lim_{k\to\infty} a_{1k} \\ \lim_{k\to\infty} a_{2k} \\ \vdots \\ \lim_{k\to\infty} a_{nk} \end{pmatrix} .$$

Punktmengen im $\mathbb{R}^n$

Beispiele

a) $a_k = \begin{pmatrix} \sin \frac{1}{k} \\ \cos \frac{1}{k} \end{pmatrix}$

$a_1 \approx \begin{pmatrix} 0{,}84 \\ 0{,}54 \end{pmatrix} \qquad a_2 \approx \begin{pmatrix} 0{,}48 \\ 0{,}87 \end{pmatrix}$

$\lim\limits_{k\to\infty} a_k = \begin{pmatrix} \lim\limits_{k\to\infty} \sin \frac{1}{k} \\ \lim\limits_{k\to\infty} \cos \frac{1}{k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

b) $a_k = \begin{pmatrix} \frac{1}{k} \\ k \end{pmatrix}$

Folge ist divergent, da zweite Komponentenfolge divergent

Abbildungen

Bsp: $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ definiert
Abb. $f: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ via $f(x) = Ax$

Definition 5.11: (Abbildung)

Unter einer Abbildung

$$\mathbf{f} : D \to \mathbb{R}^m, \ D \subset \mathbb{R}^n, \ n, m \in \mathbb{N},$$

verstehen wir eine Zuordnungsvorschrift, die jedem $\mathbf{x} \in D$ genau ein Element $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$ zuordnet, wobei wir die Schreibweise $\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ verwenden.
D heißt Definitionsbereich der Abbildung $\mathbf{f}$.

$$W = \mathbf{f}(D) := \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m | \text{es existiert ein } \mathbf{x} \in D \text{ mit } \mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x})\}$$

heißt Wertebereich der Abbildung $\mathbf{f}$.

Graph einer Funktion

Buch Kap. 5.2

$a \in [0,1]$

$f(x,y) = a$

$\Rightarrow \sqrt{1-x^2-y^2} = a$

$\Rightarrow 1 - x^2 - y^2 = a^2$

$\Rightarrow x^2 + y^2 = 1 - a^2$

Kreis um 0 mit Radius

$\sqrt{1-a^2}$

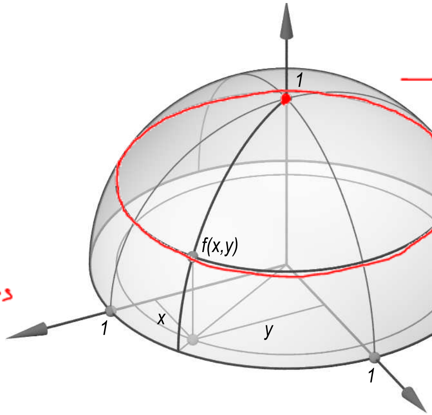


Abbildung 5.8: Graph der Abbildung
$z = f(x,y) = \sqrt{1-x^2-y^2},\ D := \{(x,y)^T \mid x^2+y^2 \le 1\}$

Abbildungen

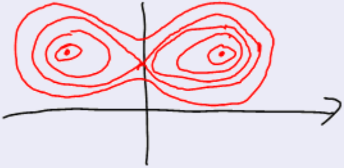
Beispiele

$f(x,y) = \sin(x) \cdot \sin(y)$

$z = f(x,y)$

Definitionsbereich $D = \mathbb{R}^2$

Wertebereich $W = [-1, 1]$



Abbildungen

Definition 5.30: (Niveaumenge)

Sei die Funktion $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^n$, gegeben. Unter einem Niveau a der Funktion f verstehen wir alle Punkte $\mathbf{x} \in D$ mit $f(\mathbf{x}) = a = \mathrm{const}$.

Diese Punktmenge bezeichnet man auch als Niveaumenge. Ist diese Menge ein Weg, so nennt man sie Niveau- oder Höhenlinie.

Graph einer Funktion

Buch Kap. 5.8

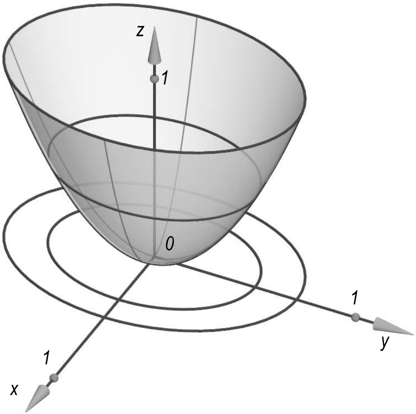


Abbildung 5.19: Graph einer Funktion und Niveaulinien

Stetigkeit von Abbildungen

Buch Kap. 5.4

Definition 5.20: (Stetigkeit einer Funktion)

Sei $f : D \to \mathbb{R}, \; D \subset \mathbb{R}^n$.

a) f heißt stetig in $\mathbf{x}_0 \in D$, falls für alle Folgen $(\mathbf{x}_k) \subset D$ $(k \in \mathbb{N})$ aus $\lim_{k\to\infty} \mathbf{x}_k = \mathbf{x}_0$ die Beziehung

$$\lim_{k\to\infty} f(\mathbf{x}_k) = f(\mathbf{x}_0)$$

folgt.

b) f heißt stetig auf $A \subset D$, falls für alle $\mathbf{x} \in A$ gilt: f ist stetig in $\mathbf{x}$.

c) f heißt stetig, falls f auf dem gesamten Definitionsbereich D stetig ist.

Stetigkeit von Abbildungen

Buch Kap. 5.4

Definition 5.21: (Stetigkeit einer Funktion)

Sei $\mathbf{f} : D \to \mathbb{R}^m,\ D \subset \mathbb{R}^n,\ \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} f_1(\mathbf{x}) \\ f_2(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ f_m(\mathbf{x}) \end{pmatrix}$.

$\mathbf{f}$ heißt stetig in $\mathbf{x}_0 \in D$, stetig auf $A \subset D$ bzw. stetig, falls f_j stetig in $\mathbf{x}_0 \in D$, stetig auf $A \subset D$ bzw. stetig ist für alle $j = 1, 2, \ldots, m$.

Stetigkeit von Abbildungen

Buch Kap. 5.4

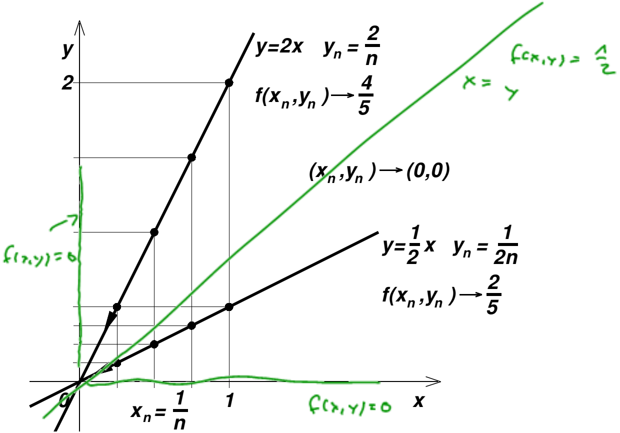


Abbildung 5.15: Unstetigkeitsstelle $(0,0)$ der Funktion

$$f(x,y) := \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq 0, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Beispiele

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & : (x,y) \neq 0 \\ 0 & : x = y = 0 \end{cases}$$

Es gilt
$$f\left(\tfrac{1}{k}, 0\right) = \frac{\frac{1}{k} \cdot 0}{\frac{1}{k^2}} = 0 \to 0 = f(0,0)$$
$$f\left(0, \tfrac{1}{k}\right) = \frac{0 \cdot \frac{1}{k}}{\frac{1}{k^2}} = 0 \to 0 = f(0,0)$$

Es gilt $\left(\frac{1}{k}, \frac{1}{k}\right) \xrightarrow[k \to \infty]{} 0$

$$f\left(\tfrac{1}{k}, \tfrac{1}{k}\right) = \frac{\frac{1}{k} \cdot \frac{1}{k}}{\frac{1}{k^2} + \frac{1}{k^2}} = \frac{\frac{1}{k^2}}{\frac{2}{k^2}} = \frac{1}{2} \neq 0 = f(0,0)$$

Minimum und Maximum

Definition 5.22: (Minimum und Maximum)

M heißt Maximum der Funktion $f : D \to \mathbb{R}$, falls

$$f(\mathbf{x}) \leq M \quad \text{für alle} \quad \mathbf{x} \in D$$

gilt und falls es ein $\mathbf{x}_M \in D$ mit $f(\mathbf{x}_M) = M$ gibt.

m heißt Minimum der Funktion $f : D \to \mathbb{R}$, falls

$$f(\mathbf{x}) \geq m \quad \text{für alle} \quad \mathbf{x} \in D$$

gilt und falls es ein $\mathbf{x}_m \in D$ mit $f(\mathbf{x}_m) = m$ gibt.

Minimum und Maximum auf kompakten Mengen

Satz 5.2: (Stetige Funktion auf Kompaktum)

Sei $f : D \to \mathbb{R},\ D \subset \mathbb{R}^n$ eine stetige Funktion und $D \subset \mathbb{R}^n$ eine kompakte Menge, dann nimmt f auf D Maximum und Minimum an.

Minimum und Maximum auf kompakten Mengen

Buch Kap. 5.4

Beispiele

Differenzierbarkeit im $\mathbb{R}^n$

Partielle Ableitungen

Buch Kap. 5.5

Definition 5.23: (partielle Differenzierbarkeit)

Sei die Funktion $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^n$, wobei D eine offene Menge ist, gegeben. Existiert der Grenzwert

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(\mathbf{x} + h\mathbf{e}_j) - f(\mathbf{x})}{h},$$

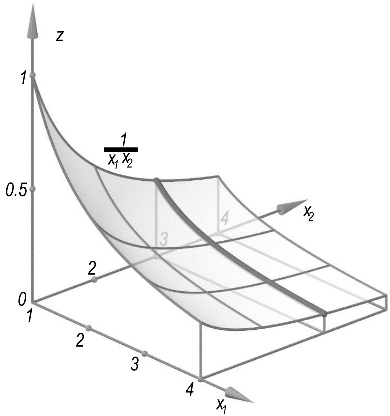
$e_j = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow j\text{te Stelle}$

dann ist die Funktion f an der Stelle $\mathbf{x}$ partiell differenzierbar nach x_j und durch den Grenzwert

$$\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_j} := \lim_{h \to 0} \frac{f(\mathbf{x} + h\mathbf{e}_j) - f(\mathbf{x})}{h}$$

ist die **partielle Ableitung** nach x_j von f an der Stelle $\mathbf{x}$ definiert.

Partielle Ableitungen



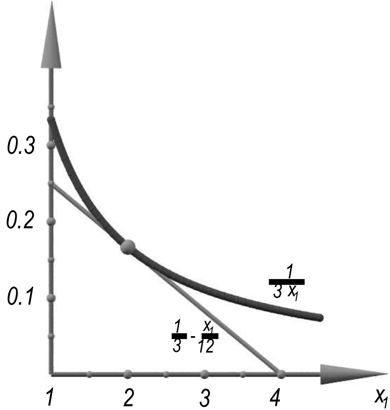


Abbildung 5.16: Graph von $f(x_1, x_2) = \frac{1}{x_1 x_2}$, Abbildung 5.17: Graph von $f^*(x_1) := f(x_1, 3) = \frac{1}{3x_1}$ einschließlich Tangente an f^*.

Partielle Ableitungen

Beispiele

a) $f(x,y) = \sin(x)\sin(y)$

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x,y) = \cos(x)\sin(y) \quad , \quad \frac{\partial}{\partial y} f(x,y) = \sin(x)\cos(y)$$

b) $f(x,y) = e^{x^2+2y^2}$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x\, e^{x^2+2y^2} \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 4y\, e^{x^2+2y^2}$$

Partielle Ableitungen

Buch Kap. 5.5

Beispiele

Partielle Ableitungen

Definition 5.24: (partielle Differenzierbarkeit)

$f : D \to \mathbb{R}$ ist auf $A \subset D$, A offen, partiell differenzierbar nach x_j, falls f in allen Punkten $\mathbf{x} \in A$ partiell nach x_j differenzierbar ist.
f ist partiell nach x_j differenzierbar, falls f auf D partiell nach x_j differenzierbar ist.
Für die partielle Ableitung nach x_j wird auch die Bezeichnung f_{x_j} $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ verwendet.
f heißt partiell differenzierbar, falls alle partiellen Ableitungen existieren.