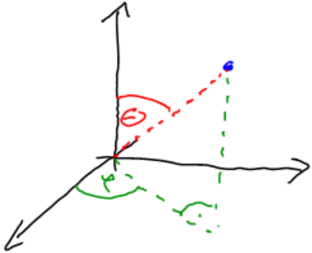
~~Polar~~koordinaten

Buch Kap. 8.5

Kugel-

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \sin\Theta \cos\varphi \\ r \sin\Theta \sin\varphi \\ r \cos\Theta \end{pmatrix} = g(r,\Theta,\varphi)$$



$[0,\pi]$ Θ : Polarwinkel

$[-\pi,\pi]$ φ : Azimutwinkel

$0 \le r$: Radius

$$g'(r,\Theta,\varphi) = \begin{pmatrix} \sin\Theta \cos\varphi & r\cos\Theta \cos\varphi & -r\sin\Theta \sin\varphi \\ \sin\Theta \sin\varphi & r\cos\Theta \sin\varphi & r\sin\Theta \cos\varphi \\ \cos\Theta & -r\sin\Theta & 0 \end{pmatrix}$$

$$\det g'(r,\Theta,\varphi) = r^2\left(\sin^3\Theta \sin^2\varphi + \cos^2\Theta \sin\Theta \cos^2\varphi + \cos^2\Theta \sin\Theta \sin^2\varphi + \sin^3\Theta \cos^2\varphi \right)$$

$= \cos^2\Theta \sin\Theta$ $\qquad$ $= \sin^3\Theta$

$$= r^2 \sin\Theta$$

Polarkoordinaten

$$B = \{ (x,y,z) : x^2+y^2+z^2 \le R^2 \}$$

$$\int_B 1 \, dx\,dy\,dz = \int_{[0,R]\times[0,\pi]\times[-\pi,\pi]} 1 \cdot r^2 \sin\theta \, d(r,\theta,\varphi)$$

$$= \int_0^R \int_0^\pi \int_{-\pi}^{\pi} r^2 \sin\theta \, d\varphi \, d\theta \, dr$$

$$= 2\pi \int_0^R r^2 \underbrace{\int_0^\pi \sin\theta \, d\theta}_{=2} \, dr = 4\pi \int_0^R r^2 \, dr = \frac{4}{3}\pi R^3$$

Kreiskoordinaten

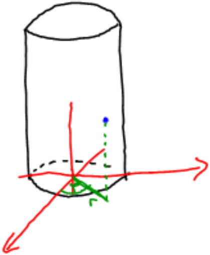
Buch Kap. 8.5

Kreiskoordinaten

Buch Kap. 8.5

Zylinderkoordinaten

Buch Kap. 8.5



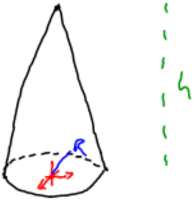
$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \\ z \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{l} r \geq 0 \\ \varphi \in [-\pi, \pi] \end{array}$$

$$S'(r, \varphi, z) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\cdot\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & r\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\det S'(r, \varphi, z) = r$$

Zylinderkoordinaten

Buch Kap. 8.5



$$B = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \le z \le h : \quad x^2 + y^2 \le R^2 \left(1 - \frac{z}{h}\right)^2 \right\}$$

Radius bei $z = 0$: $r = R$

" " $z = h$: $r = 0$

Radius bei $z \in [0,h]$: $R\left(1 - \frac{z}{h}\right)$

$$\int_B 1 \, d(x,y,z) = \int_0^h \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^{R(1-\frac{z}{h})} r \, dr \, d\varphi \, dz$$

$$= \int_0^h \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2} r^2 \Big|_0^{R(1-\frac{z}{h})} d\varphi \, dz$$

$$= 2\pi \int_0^h \frac{1}{2} R^2 \left(1 - \frac{z}{h}\right)^2 dz$$

$$= \pi R^2 \int_0^h \left(1 - \frac{z}{h}\right)^2 dz$$

$$= \pi R^2 \; -\frac{h}{3} \left(1 - \frac{z}{h}\right)^3 \Big|_0^h = \frac{\pi R^2}{3} h$$

Zylinderkoordinaten

Buch Kap. 8.5

Oberflächen und Oberflächenintegrale

Integration über Oberflächen

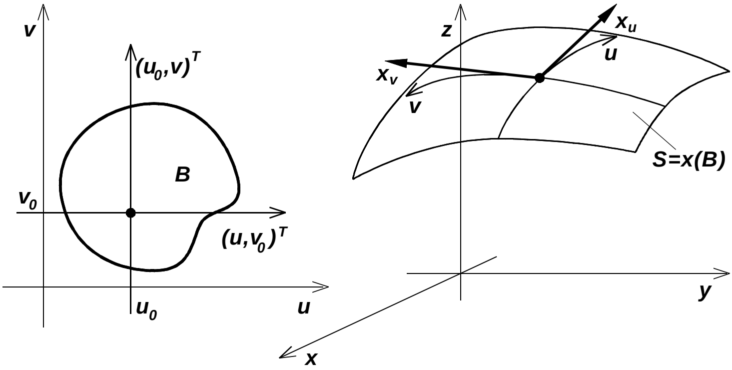


Abbildung 8.20: Reguläres Flächenstück $S = \mathbf{x}(B)$

Parametrisierung von Flächenstücken

Buch Kap. 8.6

Parametrisierung

Es seien $D \subset \mathbb{R}^2$ ein Gebiet und $B \subset D$ ein regulärer Bereich. Sei $\mathbf{x} : D \to \mathbb{R}^3$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld. Die Einschränkung von $\mathbf{x}$ auf B wird Parametrisierung eines reguären Flächenstücks genannt, falls

1) $\mathbf{x}$ injektiv ist, und
2) für alle $(u, v)^T \in B$

$$\mathbf{x}_u(u, v) \times \mathbf{x}_v(u, v) \neq \mathbf{0} \text{ erfüllt ist.}$$

Die Punktmenge

$$S := \{\mathbf{x}(u, v) | (u, v)^T \in B\} =: \mathbf{x}(B)$$

ist dann das von der Parameterdarstellung $\mathbf{x}$ dargestellte Flächenstück und wird reguläres Flächenstück genannt.

Parametrisierung von Flächenstücken

Buch Kap. 8.6

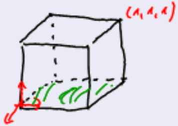
Beispiel

a) $S_1 = \{ (x,y,z) : x^2 + y^2 + z^2 = R^2 \}$

$$x : [0,\pi) \times (-\pi,\pi] \to \mathbb{R}^3$$

$$(\theta, \varphi) \mapsto \begin{pmatrix} R \sin\theta \cos\varphi \\ R \sin\theta \sin\varphi \\ R \cos\theta \end{pmatrix}$$

b)



$$S_2 = \{ (x,y,0) : x,y \in [0,1] \} \cup \{ (x,y,1) : x,y \in [0,1] \}$$
$$\cup \{ (x,0,z) : x,z \in [0,1] \} \cup \{ (x,1,z) : x,z \in [0,1] \}$$
$$\cup \{ (0,y,z) : y,z \in [0,1] \} \cup \{ (1,y,z) : y,z \in [0,1] \}$$

stückweise reguläre Fläche

Buch Kap. 8.6

stückweise reguläre Fläche

Eine Teilmenge $S \subset \mathbb{R}^3$ heißt stückweise reguläre Fläche, wenn es endlich viele reguläre Flächenstücke $S_1, ..., S_p$ gibt, die höchstens endlich viele reguläre Kurvenstücke ihrer Ränder gemeinsam besitzen und für die

$$S = \cup_{j=1}^{p} S_j$$

gilt.

stückweise reguläre Fläche

Beispiel

stückweise reguläre Fläche

Buch Kap. 8.6

Definition: Flächeninhalt eines Flächenstücks

Der Flächeninhalt $O(S)$ eines regulären Flächenstücks S, das durch die Parametrisierung $\mathbf{x} : B \to \mathbb{R}^3,\ S = \mathbf{x}(B)$ gegeben ist, wird durch

$$O(S) = \int_B |\mathbf{x}_u(u, v) \times \mathbf{x}_v(u, v)| dF$$

definiert.

stückweise reguläre Fläche

Buch Kap. 8.6

Flächeninhalt (Beispiel)

$$X : (0, \pi) \times (-\pi, \pi) \to \mathbb{R}^3$$

$$x(\theta, \varphi) = R \begin{pmatrix} \sin\theta \cos\varphi \\ \sin\theta \sin\varphi \\ \cos\theta \end{pmatrix}, \quad x_\theta \left(= \frac{\partial x}{\partial \theta}\right) = R \begin{pmatrix} \cos\theta \cos\varphi \\ \cos\theta \sin\varphi \\ -\sin\theta \end{pmatrix}$$

$$x_\varphi = R \begin{pmatrix} -\sin\theta \sin\varphi \\ \sin\theta \cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$x_\theta \times x_\varphi = R^2 \begin{pmatrix} \sin^2\theta \cos\varphi \\ \sin^2\theta \sin\varphi \\ 2 \sin\theta \cos\theta \sin\varphi \cos\varphi \end{pmatrix}$$

$$|x_\theta \times x_\varphi|^2 = R^2 (\sin^4\theta \cos^2\varphi + \sin^4\theta \sin^2\varphi + 4 \sin^2\theta \cos^2\theta \sin^2\varphi \cos^2\varphi)$$

$$= R^2 (\sin^4\theta + 4 \sin^2\theta \cos^2\theta \sin^2\varphi \cos^2\varphi)$$