# RIEMANN'sche Zwischensummen

Buch Kap. 8.2

## Definition 8.5: RIEMANN'sche Zwischensumme

Sei $f : B \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion. Ist $Z = \{B_j | j = 1, ..., n\}$ eine Zerlegung von $B$ und sind $\mathbf{x}_j \in B_j$ beliebige Punkte (sogenannte Zwischenpunkte), so heißt der Ausdruck

$$S(f, Z) = \sum_{j=1}^{n} f(\mathbf{x}_j) F(B_j)$$

RIEMANNsche Zwischensumme der Funktion $f$ bezüglich der Zerlegung $Z$ und der Zwischenpunkte $\mathbf{x}_j$.

# RIEMANNsches Flächenintegral

Buch Kap. 8.2

## Satz 8.2

Ist $f$ beschränkt und in $B$ (möglicherweise mit Ausnahme einer Nullmenge) stetig, so

- konvergiert die Folge der RIEMANNschen Zwischensummen $(S(f, Z_k))$ für jede Folge zulässiger Zerlegungen $(Z_k)$, und
- der Grenzwert
$$I := \lim_{k\to\infty} S(f, Z_k)$$
ist unabhängig von der speziellen Wahl der zulässigen Folge von Zerlegungen $(Z_k)$ und von der Wahl der Zwischenpunkte.

# RIEMANNsches Flächenintegral

Buch Kap. 8.2

## Definition 8.6: RIEMANNsches Flächenintegral

Unter den Voraussetzungen an $f$ aus Satz 8.2 nennt man $I$ das RIEMANNsche Flächenintegral der Funktion $f$ über den Bereich $B$, und man verwendet die Schreibweisen

$$\int_B f\,dF = \int_B f(x)\,dF = \int_B f(x)\,dx = \int_B f(x)\,dx_1 \ldots dx_n := I,$$

wobei $x = (x_1, \ldots, x_n)$.

# Volumen

Buch Kap. 8.2

## Satz 8.3

a) Für jeden Bereich $B \subset \mathbb{R}^n$ gilt offensichtlich

$$\int_B 1 \, dF = F(B) \text{ (Volumen von } B\text{)}.$$

b) Ist $f \geq 0$ und stetig, so beschreibt

$$K = \{(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n)^t \in B;\ 0 \leq x_n \leq f(x_1, \ldots, x_{n-1})\}$$

eine Teilmenge des $\mathbb{R}^n$. Das Integral $\int_B f \, dF$ definiert dann das Volumen $V(K)$ dieser Teilmenge.

# Eigenschaften des RIEMANN-Integrals

Buch Kap. 8.2

## Eigenschaften des RIEMANN-Integrals

(i) $\int_B (f+g)\, dF = \int_B f\, dF + \int_B g\, dF$ (Additivität des Integrals),
$\int_B \alpha f\, dF = \alpha \int_B f\, dF$ (Homogenität des Integrals),

(ii) Aus $f \leq g$ folgt $\int_B f\, dF \leq \int_B g\, dF$ (Monotonie des Integrals)

(iv) Wenn $B_1$ und $B_2$ zwei Bereiche mit $B_1 \cup B_2 = B$ und $F(B_1 \cap B_2) = 0$ sind, so gilt

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

$$\int_{B_1} f\, dF + \int_{B_2} f\, dF = \int_B f\, dF \text{ (Bereichsadditivität}$$

(v) Wenn $B$ ein regulärer Bereich ist und $f : B \to \mathbb{R}$ stetig ist, so gibt es einen Punkt $\mathbf{x}^* \in B$ mit

$$\int_B f\, dF = f(\mathbf{x}^*) F(B) \text{ (Mittelwertsatz der Integralrechnung).}$$

# Integration über Produktintervalle



## Satz (vergl. Satz 8.4, 8.16)

Seien $a_i < b_i$ ($i = 1, \ldots, n$) Zahlen. Dann heißt

$$I := \prod_{i=1}^{n} [a_i, b_i] \text{ Produktintervall.}$$

Seien $I_x \subset \mathbb{R}^p$ und $I_y \subset \mathbb{R}^q$ Produktintervalle und $I := I_x \times I_y$. Ist $f$ auf $I$ R-integrierbar und existiert

$$g(y) := \int_{I_x} f(x, y) dx \text{ für jedes } y \in I_y,$$

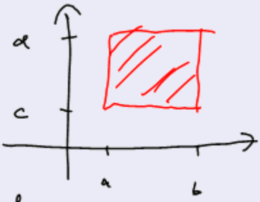
so ist $g$ auf $I_y$ R-integrierbar und es gilt

$$\int_I f(x, y) d(x, y) = \int_{I_y} \left( \underbrace{\int_{I_x} f(x, y) dx}_{g(y)} \right) dy.$$

## Beispiel

$$f(x,y) = \sin x \sin y$$

$$\int_{[a,b]\times[c,d]} f(x,y)\, d(x,y)$$




$$= \int_c^d \left( \int_a^b f(x,y)\, dx \right) dy = \int_c^d \int_a^b \sin x \sin y \, dx \, dy$$

$$= \int_c^d \sin y \int_a^b \sin x \, dx \, dy = \int_c^d \sin y \, dy \, (\cos a - \cos b)$$

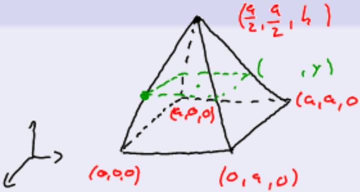
$$= (\cos c - \cos d)\,(\cos a - \cos b)$$

# Integration über Produktintervalle



## Beispiel

$B = \{ (x, y, z) \;:\; 0 \le z \le h$




Kantenlänge des Querschnitts-quadrats in Höhe h:

| z | x | y |
|---|---|---|
| $h$ | $0$ | $0$ |
| $0$ | $a$ | $a$ |
| $\frac{h}{3}$ | $\frac{2}{3}a$ | $\frac{2}{3}a$ |
| $\frac{2h}{3}$ | $\frac{1}{3}a$ | $\frac{1}{3}a$ |

$z \quad (1 - \frac{z}{h})a$

Mittelpunkt bei Höhe $z$:

$(\frac{a}{2}, \frac{a}{2}, z)$

Eckpunkte:

Vorne links: $(\frac{a}{2}, \frac{a}{2}, z) - ((1 - \frac{z}{h})\frac{a}{2}, (1 - \frac{z}{h})\frac{a}{2}, 0)$

$= (\frac{z}{h}\frac{a}{2}, \frac{z}{h}\frac{a}{2}, z)$

## Beispiel

Vorne rechts

$$\left(\tfrac{a}{2}, \tfrac{a}{2}, z\right) - \left(-\left(1-\tfrac{z}{h}\right)\tfrac{a}{2}, \left(1-\tfrac{z}{h}\right)\tfrac{a}{2}, z\right) = \left(a - \tfrac{z}{h}\tfrac{a}{2}, \tfrac{z}{h}\tfrac{a}{2}, z\right)$$

hinten links

$$\left(\tfrac{z}{h}\tfrac{a}{2}, a - \tfrac{z}{h}\tfrac{a}{2}, z\right)$$

hinten rechts

$$\left(a - \tfrac{z}{h}\tfrac{a}{2}, a - \tfrac{z}{h}\tfrac{a}{2}, z\right)$$

$$B = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; 0 \le z \le h, \; \tfrac{z}{h}\tfrac{a}{2} \le x \le a - \tfrac{z}{h}\tfrac{a}{2} \;\wedge\; \tfrac{z}{h}\tfrac{a}{2} \le y \le a - \tfrac{z}{h}\tfrac{a}{2} \right\}$$

$$1_B : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} \quad : \quad 1_B(\vec{x}) = \begin{cases} 1 : & \vec{x} \in B \\ 0 : & \vec{x} \notin B \end{cases}$$

## Beispiel

$$V(B) = \int_{[0,a]\times[0,a]\times[0,h]} 1_B(x,y,z) \, d(x,y,z)$$

$$= \int_0^h \int_0^a \int_0^a 1_B(x,y,z) \, dx\, dy\, dz$$

$$= \int_0^h \int_{\frac{z}{h}\frac{a}{2}}^{a-\frac{z}{h}\cdot\frac{a}{2}} \int_{\frac{z}{h}\frac{a}{2}}^{a-\frac{z}{h}\frac{a}{2}} \cdot 1 \, dx\, dy\, dz$$

$$= a \int_0^h \int_{\frac{z}{h}\frac{a}{2}}^{a-\frac{z}{h}\frac{a}{2}} \left(1-\frac{z}{h}\right) dy\, dz = a^2 \int_0^h \left(1-\frac{z}{h}\right)^2 dz = a^2 \; -\frac{h}{3}\left(1-\frac{z}{h}\right)^3 \Big|_0^h$$

$$= \frac{a^2}{3} h$$

# Transformationsformel

Buch Kap. 8.5

## vergl. Satz 8.9: Transformationsformel

Sei $g : G \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ stetig diffbar, injektiv und es gelte $\det Dg(x) > 0$ oder $\det Dg(x) < 0$ für alle $x \in G$. $T \subset G$ sei kompakt, Jordan-meßbar und $f : g(T) \to \mathbb{R}$ sei stetig.
Dann ist $g(T)$ Jordan-meßbar, $f$ auf $g(T)$ R-integrierbar und es gilt

$$\int_{g(T)} f(x)dx = \int_T f(g(t))|\det \underbrace{Dg(t)}_{g'(t) \in \mathbb{R}^{n\times n}}|dt.$$

# Transformationsformel für Volumenintegrale

Buch Kap. 8.5

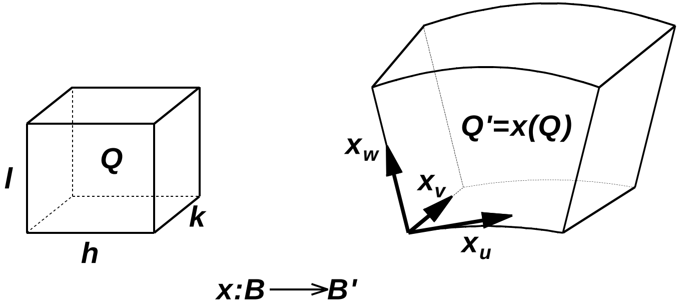



Abbildung 8.35: Koordinatentransformation in 3d

# Polarkoordinaten

Buch Kap. 8.5

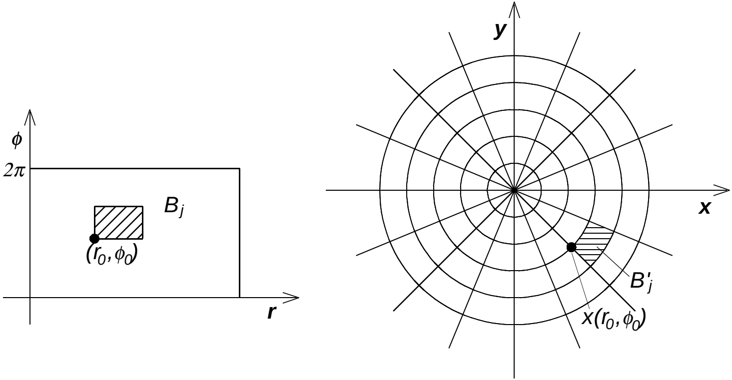


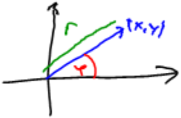

Abbildung 8.18: Polarkoordinaten

# Polarkoordinaten

Buch Kap. 8.5

$$g : (0,\infty)\times[0,2\pi) \to \mathbb{R}^2\setminus\{0\}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longleftarrow\!\shortmid \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \end{pmatrix}$$




$$g'(r,\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{pmatrix} \qquad \det g'(r,\varphi) = r$$

$$B = \{ (x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \le R^2 \}$$

$$f(x,y) = x^4 + y^4$$

$$\int_B f(x,y)\, d(x,y)$$

$$= \int_0^R \int_0^{2\pi} r^4(\cos^4\varphi + \sin^4\varphi)\, r \, d\varphi\, dr$$

$$= \int_0^R r^5\, dr \int_0^{2\pi} \cos^4\varphi + \sin^4\varphi \, d\varphi = \frac{R^6}{6}\int_0^{2\pi} \cos^4 + \sin^4 \, d\varphi$$

# Polarkoordinaten

Buch Kap. 8.5

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx\right)^2 = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2}\,dy$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} e^{-y^2}\,dx\,dy = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy$$

$$= \int_0^{\infty}\left(\int_0^{2\pi} e^{-r^2}\,r\,d\varphi\right)dr = 2\pi \int_0^{\infty} e^{-r^2}\,r\,dr$$

$$= 2\pi \left.\frac{-1}{2} e^{-r^2}\right|_0^{\infty} = \pi$$

$e^{-x^2} > 0$

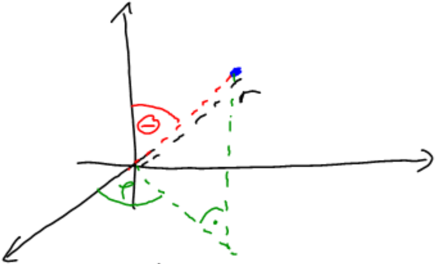
$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}$$

# ~~Polar~~koordinaten

Buch Kap. 8.5

Kugel

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \sin\Theta \cos\varphi \\ r \sin\Theta \sin\varphi \\ r \cos\varphi \end{pmatrix}$$




$\Theta$ : Polarwinkel

$\varphi$ : Azimutwinkel