Stammfunktion eines Gradientenfeldes

Buch Kap. 7.6

Beispiel

$$v(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} x_2 x_3 \\ x_1 x_3 \\ x_1 x_2 \end{pmatrix} \qquad J_v(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} 0 & x_3 & x_2 \\ x_3 & 0 & x_1 \\ x_2 & x_1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^3 \qquad \gamma(t) = t \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t x_1 \\ t x_2 \\ t x_3 \end{pmatrix}$$

$$\int_\gamma v \, ds = \int_0^1 \begin{pmatrix} (t x_2) \cdot (t x_3) \\ (t x_1) (t \cdot x_3) \\ (t x_1) (t x_2) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} dt = \int_0^1 v(\gamma(t)) \cdot \dot{\gamma}(t) \, dt$$

$$= \int_0^1 t^2 \cdot 3 x_1 x_2 x_3 \, dt = 3 x_1 x_2 x_3 \int_0^1 t^2 \, dt = x_1 x_2 x_3$$

$$= \varphi(x_1, x_2, x_3) - \underbrace{\varphi(0,0,0)}_{=0}$$

Doppelpunktfreie Kurven

Buch Kap. 7.6

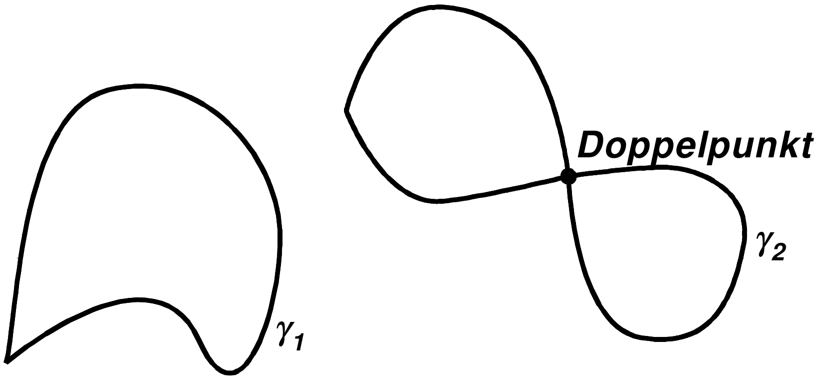


Abbildung 7.5: Doppelpunktfreie Kurve γ_1 und Kurve mit Doppelpunkt γ_2

Doppelpunktfreie Kurven

Buch Kap. 7.6

Definition 7.9: (Doppelpunktfreiheit)

Eine Kurve $\gamma : [t_a, t_e] \to \mathbb{R}^n$ heißt doppelpunktfrei, falls

$$\gamma(t_1) \neq \gamma(t_2) \quad \text{für} \quad t_1 \neq t_2,\; t_1, t_2 \in (t_a, t_e)$$

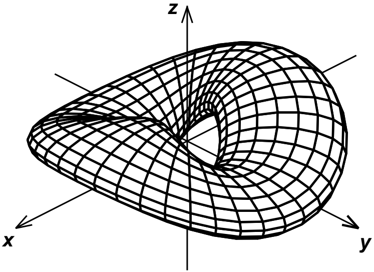
und $\gamma(t_a) \neq \gamma(t)$ für $t \in (t_a, t_e)$ gilt.

einfach zusammenhängend

Buch Kap. 7.6

Definition 7.10: (einfach zusammenhängendes Gebiet)

Ein Gebiet $D \subset \mathbb{R}^n$ heißt einfach zusammenhängend oder kontrahierbar, falls jede geschlossene, doppelpunktfreie Kurve in D stetig auf einen Punkt $\mathbf{x} \in D$ zusammengezogen werden kann.



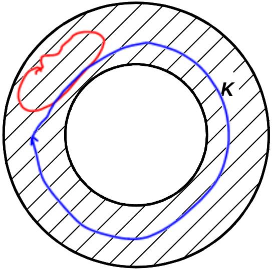


Abbildung 7.6 (links): Torus als nicht einfach zusammenhängendes Gebiet im $\mathbb{R}^3$, Abbildung 7.7 (rechts): Kreisring als nicht einfach zusammenhängendes Gebiet im $\mathbb{R}^2$.

Existenz eines Potentials

Satz 7.5: (Kriterium für die Existenz eines Potentials, zweiter Hauptsatz für Potentialfelder)

Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet und $\mathbf{v} : D \to \mathbb{R}^n$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld.
$\mathbf{v}$ ist genau dann ein Potentialfeld, wenn die JACOBI–Matrix $J_{\mathbf{v}}(\mathbf{x})$ für alle $\mathbf{x} \in D$ symmetrisch ist, also

$$J_{\mathbf{v}}(\mathbf{x}) = J_{\mathbf{v}}(\mathbf{x})^T$$

gilt.
Die Forderung nach der Symmetrie der JACOBI–Matrix nennt man auch Integrabilitätsbedingung.
Für den Fall $n = 3$ ist die Symmetrie der JACOBI–Matrix gleichbedeutend mit der Gleichung

$$\operatorname{rot} \mathbf{v}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}.$$

einfach zusammenhängend

Buch Kap. 7.6

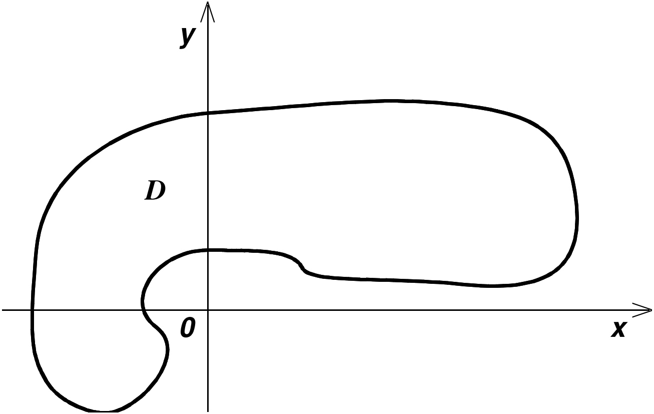


Abbildung 7.8: Einfach zusammenhängendes Gebiet D mit $(0, 0) \notin D$.

Kurvenintegral Methode

Buch Kap. 7.6

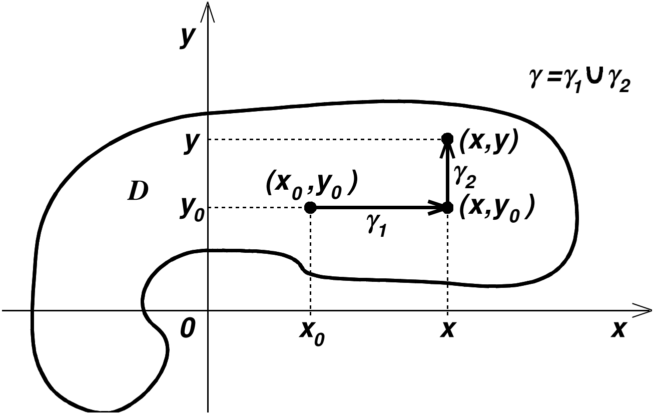


Abbildung 7.9: Zur Methode mit dem Kurvenintegral.

Vektorpotentiale

Buch Kap. 7.8

Definition 7.11: (Vektorpotential)

Sei $\mathbf{v} : D \to \mathbb{R}^3,\ D \subset \mathbb{R}^3$, gegeben. Existiert ein differenzierbares Vektorfeld $\mathbf{w} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit

$$\mathbf{v} = \operatorname{rot} \mathbf{w}\,,$$

D.h. Existenz von w

$\Rightarrow \operatorname{div} v = 0$

so heißt $\mathbf{w}$ **Vektorpotential** von $\mathbf{v}$.

$$\operatorname{div} v = \operatorname{div} \operatorname{rot} w = \operatorname{div} \begin{pmatrix} \frac{\partial w_3}{\partial x_2} - \frac{\partial w_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial w_1}{\partial x_3} - \frac{\partial w_3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial w_2}{\partial x_1} - \frac{\partial w_1}{\partial x_2} \end{pmatrix} = \cancel{\frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} w_3} - \cancel{\frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_3} w_2} + \cancel{\frac{\partial^2 w_1}{\partial x_2 \partial x_3}} - \cancel{\frac{\partial w_3}{\partial x_2 \partial x_1}} + \cancel{\frac{\partial w_2}{\partial x_3 \partial x_1}} - \cancel{\frac{\partial^2 w_1}{\partial x_3 \partial x_2}} = 0$$

Vektorpotentiale

Buch Kap. 7.8

Satz 7.6: (Kriterium für die Existenz eines Vektorpotentials)

Sei $\mathbf{v} : D \to \mathbb{R}^3$, $D \subset \mathbb{R}^3$, ein differenzierbares Vektorfeld. Ist D eine offene konvexe Menge, dann ist die Bedingung

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$$

notwendig und hinreichend für die Existenz eines Vektorpotentials $\mathbf{w}$ mit $\mathbf{v} = \operatorname{rot} \mathbf{w}$.
Statt der Forderung der Konvexität von D reicht hier auch die schwächere Forderung, dass D einfach zusammenhängend ist.

$D \subset \mathbb{R}^n$ heißt „konvex“, wenn $\forall\, x, y \in D$, $t \in [0,1]$ gilt
$tx + (1-t)y \in D$

Vektorpotentiale

Buch Kap. 7.8

Beispiel

$$V(x,y,z) = \begin{pmatrix} xy\sin(z) \\ xy\sin(z) \\ (x+y)\cos(z) \end{pmatrix} \qquad v: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$

$$\operatorname{div} v(x,y,z) = y\sin(z) + x\sin(z) + (x+y)(-\sin(z)) = 0$$

Ansatz $\quad w(x,y,z) = \begin{pmatrix} w_1(x,y,z) \\ w_2(x,y,z) \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \operatorname{rot} w = \begin{pmatrix} -\frac{\partial}{\partial z} w_2 \\ \frac{\partial}{\partial z} w_1 \\ \frac{\partial}{\partial x} w_2 - \frac{\partial}{\partial y} w_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xy\sin(z) \\ xy\sin(z) \\ (x+y)\cos(z) \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow w_2 = xy\cos(z) + c_1(x,y)$$

$$w_1 = -xy\cos(z) + c_2(x,y)$$

In letzte Gleichung: $(x+y)\cos(z) = y\cos(z) + \frac{\partial}{\partial x} c_1(x,y) + x\cos(z) - \frac{\partial}{\partial y} c_2(x,y)$

Also: $c_1 = c_2 = 0$ tut's $\qquad = (x+y)\cos(z) + \frac{\partial}{\partial x} c_1(x,y) - \frac{\partial}{\partial y} c_2(x,y)$

Beispiel

Also $\quad w(x,y,z) = \begin{pmatrix} -xy & \cos(z) \\ xy & \cos(z) \\ & 0 \end{pmatrix}$

Probe:

$$\operatorname{rot} w = \begin{pmatrix} -\frac{\partial}{\partial z} w_2 \\ \frac{\partial}{\partial z} w_1 \\ \frac{\partial}{\partial x} w_2 - \frac{\partial}{\partial y} w_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xy \ \sin(z) \\ xy \ \sin(z) \\ y\cos(z) + x\cos(z) \end{pmatrix}$$

$$= v$$

Integration im Mehrdimensionalen

Flächeninhalt ebener Bereiche

Buch Kap. 8.1

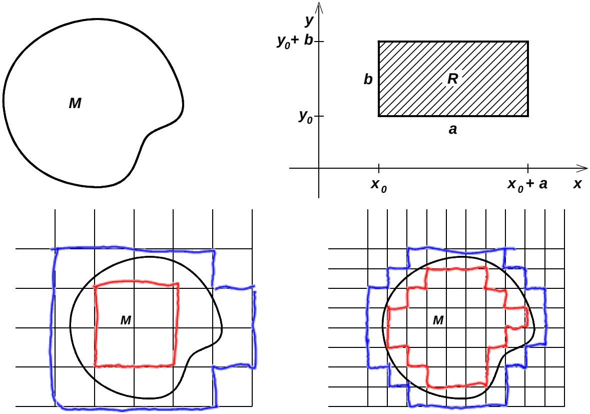


Abbildung 8.1-8.4: Punktmenge $M \subset \mathbb{R}^2$ (ol), Rechteck (or), Gitter mit Maschenweite h (ul), mit Maschenweite $h/2$ (ur).

Volumen

Definition 8.1: JORDAN-messbar

Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ und G_h Gitter über M mit Maschenweite $h > 0$. $s_h(M)$ bezeichne Fläche aller vollständig in M enthaltenen Maschen, $S_h(M)$ die Fläche aller Maschen, die wenigstens einen Punkt aus M enthalten. Mit

$$F_i(M) := \lim_{h\to 0} s_h(M) \text{ und } F_o(M) := \lim_{h\to 0} S_h(M)$$

heißt
die Menge M JORDAN-messbar, wenn

$$F_i(M) = F_o(M)$$

gilt.
In diesem Fall wird das Volumen der Menge M durch

$$F(M) := F_i(M) = F_o(M)$$

reguläre Bereiche

Buch Kap. 8.1

Definition 8.2: regulärer Bereich

Eine beschränkte Teilmenge $B \subset \mathbb{R}^n$ heißt regulärer Bereich, falls

a) B abgeschlossen ist,

b) das Innere von B, also $B \setminus \partial B$, ein Gebiet ist und

c) der Rand ∂B von B aus endlich vielen regulären $n-1$-dimensionalen Hyperflächen besteht (die etwa als Graphen von glatten Funktionen darstellbar sind).

Durchmesser einer Menge

Buch Kap. 8.2

Definition 8.3: Durchmesser

Unter dem Durchmesser einer Punktmenge C wollen wir

$$\operatorname{diam}(C) := \sup\{|\mathbf{x} - \mathbf{y}| \mid \mathbf{x}, \mathbf{y} \in C\}$$

verstehen.

Zerlegungen

Definition 8.4: Zerlegung

Unter einer Zerlegung Z von B verstehen wir eine Familie

$$\{B_j | j = 1, ..., n\}$$

von regulären Teilbereichen mit den Eigenschaften

a) $\cup_{j=1}^{n} B_j = B$,
b) für $i \neq j$ ist $B_i \cap B_j$ eine Nullmenge,

wobei wir unter einer Familie eine Menge von Mengen verstehen wollen.
Die Feinheit $\delta(Z)$ einer Zerlegung Z ist durch

$$\delta(Z) := \max\{\mathrm{diam}(B_j) | j = 1, ..., n\}$$

definiert. Eine Folge (Z_k) von Zerlegungen heißt zulässig, falls

$$\lim \delta(Z_k) = 0$$