Potential und Potentialfeld

Buch Kap. 7.3

Defintion 7.6: (Potential, Potentialfeld, Gradientenfeld)

Sei **v** ein Vektorfeld.
Ein differenzierbares Skalarfeld ϕ, das die Gleichung

$$\operatorname{grad} \phi = \mathbf{v}$$

erfüllt, nennt man ein Potential oder eine Stammfunktion von **v**.
Falls es zu einem Vektorfeld **v** ein Potential ϕ gibt, nennt man **v** Potentialfeld oder Gradientenfeld (der Begriff konservatives Feld wird auch verwendet).

Potential und Potentialfeld

Buch Kap. 7.3

Potential, Potentialfeld, Gradientenfeld

Allgemein: v sei Gradientenfeld

$v : D \to \mathbb{R}^4$, $D \subset \mathbb{R}^4$, und sei v stet. diffbar

$\Rightarrow \exists\, \phi : D \to \mathbb{R}$, s.d. $v = \operatorname{grad} \phi$

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_i} \phi = \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} \phi = \frac{\partial}{\partial x_i} v_j$$

Beispiel: $v(x,y,z) = \begin{pmatrix} yz \\ xz \\ xy \end{pmatrix}$ $\quad v: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$$\operatorname{rot} v(x,y,z) = \begin{pmatrix} x - x \\ y - y \\ z - z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

könnte klappen...

Potential und Potentialfeld

Potential, Potentialfeld, Gradientenfeld

Ansatz $\nabla \phi = v \Rightarrow \frac{\partial}{\partial x}\phi = v_1 \quad \frac{\partial}{\partial z}\phi = v_3$

$$\frac{\partial}{\partial y}\phi = v_2$$

$$\phi(x,0,0) - \phi(0,0,0) = \int_0^x \frac{\partial}{\partial x}\phi(\xi,0,0)\,d\xi = \int_0^x \underbrace{v_1(\xi,0,0)}_{=0\cdot 0=0}\,d\xi$$

$$= 0$$

$$\phi(x,y,0) - \phi(x,0,0) = \int_0^y \frac{\partial}{\partial y}\phi(x,\xi,0)\,d\xi = \int_0^y \underbrace{v_2(x,\xi,0)}_{=0}\,d\xi$$

$$= 0$$

$$\phi(x,y,z) - \phi(x,y,0) = \int_0^z \frac{\partial}{\partial z}\phi(x,y,\xi)\,d\xi = \int_0^z v_3(x,y,\xi)\,d\xi$$

Potential und Potentialfeld

Buch Kap. 7.3

Potential, Potentialfeld, Gradientenfeld

$$= \int_0^z xy \, dz = xyz$$

$$\Rightarrow \phi(x,y,z) = xyz + \phi(x,y,0) = xyz + \underbrace{\phi(0,0,0)}_{=:C}$$

$$= C + xyz$$

Andrerseits gilt

$$\nabla(C + xyz) = \begin{pmatrix} yz \\ xz \\ xy \end{pmatrix} \quad \checkmark$$

Andres Bsp $\quad V(x,y,z) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

Skalare Kurvenintegrale

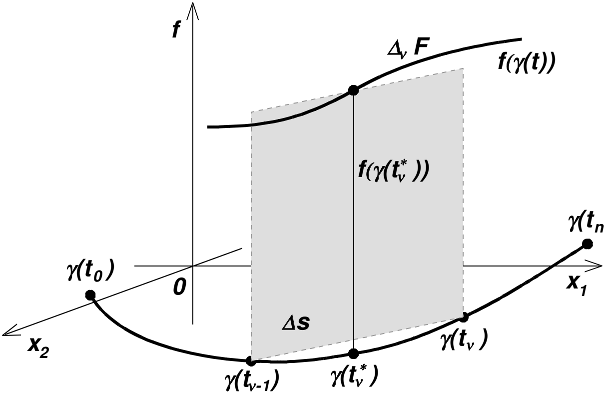


Abbildung 7.3: Zur Definition des skalaren Kurvenintegrals für $\gamma : [t_a, t_e] \to \mathbb{R}^2$

Skalare Kurvenintegrale

Buch Kap. 7.4

Definition 7.7: (Skalares Kurvenintegral einer Funktion)

Eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \supset \gamma([t_a, t_e]) \to \mathbb{R}$ sei auf allen Punkten einer Kurve $\gamma : [t_a, t_e] \to \mathbb{R}^n$ stetig. Dann heißt

$$\int_\gamma f\,ds := \int_{t_a}^{t_e} f(\gamma(t))\|\dot{\gamma}(t)\|\,dt$$

skalares Kurvenintegral der Funktion f.

Skalare Kurvenintegrale

Buch Kap. 7.4

Schritte zur Berechnung des skalaren Kurvenintegrals einer Funktion

1) Falls nicht gegeben, Parametrisierung der Kurve $\gamma : [t_a, t_e] \to \mathbb{R}^n$
2) Berechnung der Funktionswerte $f(\gamma(t))$ der Belegungsfunktion
3) Berechnung von $\|\dot{\gamma}(t)\|$
4) Berechnung des Kurvenintegrals

$$\int_\gamma f\, ds = \int_{t_a}^{t_e} f(\gamma(t)) \|\dot{\gamma}(t)\|\, dt.$$

Skalare Kurvenintegrale

Buch Kap. 7.4

Beispiel

$$f(x,y,z) = xyz. \qquad \gamma: [0,2\pi] \to \mathbb{R}^3$$

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \\ t \end{pmatrix} \qquad \dot\gamma(t) = \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$|\dot\gamma(t)| = \sqrt{2}$$

$$\int_\gamma f\, ds = \int_0^{2\pi} f(\gamma(t))\, |\dot\gamma(t)|\, dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \cos(t) \sin(t)\, t \quad \sqrt{2}\, dt = \sqrt{2} \int_0^{2\pi} t \cos(t) \sin(t) \quad dt$$

Vektorielles Kurvenintegral

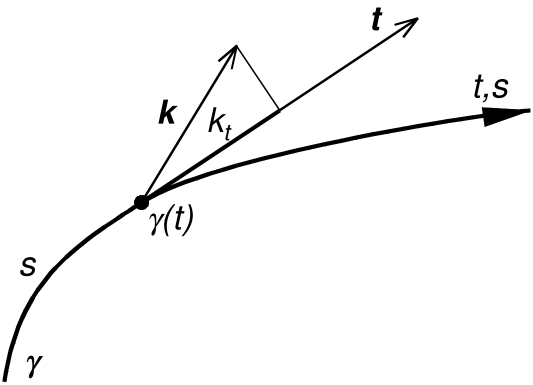


Abbildung 7.4: Kraftvektor **k** und Tangentialkomponente k_t, Kurventangentenvektor **t**. Der für die Arbeit entlang der Kurve relevante Kraftanteil wird durch k_t beschrieben.

Arbeitsintegral

Definition 7.8: (Arbeitsintegral)

Sei $\gamma : [t_a, t_e] \to \mathbb{R}^n$ ein Weg und $\mathbf{k} : \mathbb{R}^n \supset \gamma([t_a, t_e]) \to \mathbb{R}^n$ stetiges Vektorfeld. Dann heißt

$$\int_\gamma \mathbf{k} \cdot \mathbf{ds} := \int_{t_a}^{t_e} (\mathbf{k}(\gamma(t)) \cdot \dot{\gamma}(t))\, dt$$

Integral des Vektorfeldes (vektorielles Kurvenintegral bzw. Arbeitsintegral) entlang γ. Dabei bezeichnet $\mathbf{ds} = \dot{\gamma}(t)\, dt$ das vektorielle Bogenelement.

Besteht die Kurve γ aus den m Kurvenstücken $\gamma_1, ..., \gamma_m$, so setzen wir

$$\int_\gamma \mathbf{k} \cdot \mathbf{ds} := \sum_{i=1}^{m} \int_{\gamma_i} \mathbf{k} \cdot \mathbf{ds}.$$

Ist γ eine geschlossene Kurve, d.h. $\gamma(t_a) = \gamma(t_e)$, so schreiben wir

$$\oint_\gamma \mathbf{k} \cdot \mathbf{ds} \equiv \int_\gamma \mathbf{k} \cdot \mathbf{ds}.$$

Arbeitsintegral

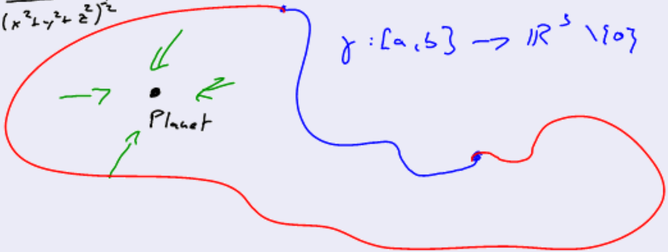
Buch Kap. 7.5

Beispiel

$F_0 > 0$

Kraftfeld $\quad F(x,y,z) = \dfrac{-F_0}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \qquad F : \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^3$

$P(x,y,z) = \dfrac{F_0}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}}$



$\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$

Energie

$$E = \int_\gamma F \, ds = \int_a^b F(\gamma(t)) \cdot \dot{\gamma}(t) \, dt$$

Rechenregeln Arbeitsintegral

Buch Kap. 7.5

Satz 7.2: (Rechenregeln für Kurvenintegrale vektorieller Art)

Sei γ eine Kurve im $\mathbb{R}^n$, seien $\mathbf{v}, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 : \mathbb{R}^n \supset \gamma([t_a, t_e]) \to \mathbb{R}^n$ stetige Vektorfelder und $\alpha \in \mathbb{R}$. Dann gelten die Regeln

(i) $\int_\gamma (\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) \cdot \mathbf{ds} = \int_\gamma \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{ds} + \int_\gamma \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{ds}$

(ii) $\int_\gamma \alpha \mathbf{v} \cdot \mathbf{ds} = \alpha \int_\gamma \mathbf{v} \cdot \mathbf{ds}$

(iii) Ist γ^* die Kurve, die aus γ durch Umkehrung des Durchlaufsinns entsteht, d.h., $\gamma^*(t) := \gamma(t_a + t_e - t)$, $t \in [t_a, t_e]$, so folgt

$$\int_{\gamma^*} \mathbf{v} \cdot \mathbf{ds} = -\int_\gamma \mathbf{v} \cdot \mathbf{ds} \, .$$

Rechenregeln Arbeitsintegral

Buch Kap. 7.5

Berechnung des Arbeitsintegrals

1) Falls nicht gegeben, Parametrisierung der Kurve $\gamma : [t_a, t_e] \to \mathbb{R}^n$
2) Berechnung der Werte $\mathbf{k}(\gamma(t))$ in den Kurvenpunkten
3) Berechnung des Tangentenvektors $\dot{\gamma}(t)$
4) Berechnung des Kurvenintegrals

$$\int_\gamma \mathbf{k} \cdot \mathbf{ds} = \int_{t_a}^{t_e} (\mathbf{k}(\gamma(t)) \cdot \dot{\gamma}(t))\, dt \,.$$

Arbeitsintegral

Buch Kap. 7.5

Beispiel

$$f_1(x,y) = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix} \qquad P_1 = (0,0), \quad P_2 = (1,1)$$

$$f_2(x,y) = \begin{pmatrix} xy \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \gamma_1 : [0,1] \to \mathbb{R}^2$$

$$\gamma_1(t) = \begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix}$$

$$\gamma_2(t) = \begin{pmatrix} t \\ t^2 \end{pmatrix}$$

$$\int_{\gamma_1} f_1 \, ds = \int_0^1 \begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} dt = \int_0^1 2t \, dt = 1$$

$$\int_{\gamma_2} f_1 \, ds = \int_0^1 \begin{pmatrix} t^2 \\ t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2t \end{pmatrix} dt = \int_0^1 3t^2 \, dt = 1$$

$$\int_{\gamma_1} f_2 \, ds = \int_0^1 \begin{pmatrix} t^2 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} dt = \frac{4}{3}$$

$$\int_{\gamma_2} f_2 \, ds = \int_0^1 \begin{pmatrix} t^3 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2t \end{pmatrix} dt = \int_0^1 t^3 + 2t \, dt = \frac{5}{4}$$

Stammfunktion eines Gradientenfeldes

Buch Kap. 7.6

Satz 7.3: (erster Hauptsatz für Potentialfelder)

Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet und $\mathbf{v} : D \to \mathbb{R}^n$ ein Potentialfeld mit der Stammfunktion f. , also grad $f = v$
Dann gilt für jede in D verlaufende Kurve $\gamma : [t_a, t_e] \to \mathbb{R}^n$

$$\int_\gamma \mathbf{v} \cdot \mathbf{ds} = f(\gamma(t_e)) - f(\gamma(t_a))$$

Stammfunktion eines Gradientenfeldes

Buch Kap. 7.6

Satz 7.4: (Kurvenintegrale und Potentialfelder)

Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet, $\gamma : [t_a, t_e] \to D$ eine Kurve in D und $\mathbf{v} : D \to \mathbb{R}^n$ ein stetiges Vektorfeld. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

1) Für alle Kurven γ hängt das Kurvenintegral $\int_\gamma \mathbf{v} \cdot \mathbf{ds}$ nur vom Anfangs- und Endpunkt der Kurve ab. Diese Eigenschaft heißt **Wegunabhängigkeit** des Kurvenintegrals.
2) Für alle geschlossenen Kurven γ, d.h. $\gamma(t_a) = \gamma(t_e)$, gilt $\oint_\gamma \mathbf{v} \cdot \mathbf{ds} = 0$.
3) $\mathbf{v}$ ist ein Potentialfeld.

Stammfunktion eines Gradientenfeldes

Buch Kap. 7.6

Beispiel

$$v(x,y,z) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \qquad \gamma(t) = t \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \qquad \gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^3$$

$$\int_\gamma v \, ds = \int_0^1 t \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} dt = \int_0^1 t \, \left|\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right|^2 dt$$

$$= \frac{1}{2} \left|\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right|^2 = \frac{1}{2}(x^2+y^2+z^2)$$