Analysis III für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Prof. Dr. Timo Reis
Fachbereich Mathematik, Universität Hamburg

Technische Universität Hamburg-Harburg
Wintersemester 2018/2019

Allgemeine Informationen

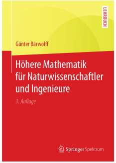
Informationsquellen

- https://www.math.uni-hamburg.de/teaching/export/tuhh/cm/a3/1819/
- http://webcast.tu-harburg.de/Mediasite/Play/2c0fd6aa8cb14a919e076981161e081d1d
- **Übungen in Tutorgruppen** (14-täglich, ab 22.10.2018)
  Dr. Hanna Peywand Kiani und ÜbungsgruppenleiterInnen
- **Hörsaalübungen** (14-täglich, ab 29.10.2018)
  Montag, 12:30–14:00 Uhr, Audimax I
  Dr. Hanna Peywand Kiani.
- **Sprechstunde Prof. Reis**
  Dienstag, E 3.079, 13:30–14:30

Literatur

PRIMÄR:

G. Bärwolff: **Höhere Mathematik für Naturwissenschaftler und Ingenieure**,
3. Auflage. Springer 2017
`http://www.springer.com/de/book/9783662550212`



SEKUNDÄR:

R. Ansorge, H. J. Oberle: Mathematik für Ingenieure 2,
3. Auflage. WILEY-VCH, 2011.

FORMELSAMMLUNG:

K. Vetters: **Formeln und Fakten im Grundkurs Mathematik**, Vieweg+Teubner, 2004

Inhalt der Analysis III

1. Punktmengen im $\mathbb{R}^n$
2. Differenzierbarkeit und Taylorformeln im $\mathbb{R}^n$
3. Extrema mit und ohne Nebenbedingungen
4. Rotation, Gradient, Divergenz
5. Integration im Mehrdimensionalen, Transformationsformel, Oberflächenintegrale
6. Sätze von Green, Gauß und Stokes

Punktmengen und Stetigkeit im $\mathbb{R}^n$

Punktmengen im $\mathbb{R}^n$

Buch Kap. 5.1

Definition 5.1: (Länge, Abstand)

Sei $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.

$\|x\|$

$$|\mathbf{x}| \;:=\; \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2} \text{ heißt Länge von } \mathbf{x},$$

$$d \;:=\; |\mathbf{x} - \mathbf{y}| \text{ heißt Abstand zwischen } \mathbf{x} \text{ und } \mathbf{y}.$$

Definition 5.2: (Kugelumgebungen)

Die Menge

$$K_{\mathbf{x}_0,r} := \{\mathbf{x} \mid |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0| < r,\; r \in \mathbb{R}, r > 0\}$$

heißt **offene Kugelumgebung** des Punktes $\mathbf{x}_0$ mit dem Radius r,

$$\overline{K}_{\mathbf{x}_0,r} := \{\mathbf{x} \mid |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0| \leq r,\; r \in \mathbb{R}, r > 0\}$$

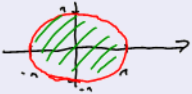
entsprechende **abgeschlossene Kugelumgebung** des Punktes $\mathbf{x}_0$ mit dem Radius r.

Punktmengen im $\mathbb{R}^n$

Buch Kap. 5.1

Beispiele

a) $K_{0,1}$ in $\mathbb{R}^2$, $K_{0,1} = \{x \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{x_1^2 + x_2^2} < 1\}$

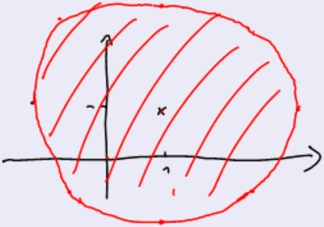


grüner Bereich ohne roten Bereich

b) $\overline{K_{0,1}}$ in $\mathbb{R}^2$

grüner Bereich inkl! roten Bereich

c) $\overline{K_{\binom{1}{1},2}}$



Definition 5.3: (offen, innerer Punkt)

$M \subset \mathbb{R}^n$ heißt offen, wenn zu jedem Element $\mathbf{x} \in M$ eine Umgebung $K_{\mathbf{x},r}$ gefunden werden kann, die in der Menge M liegt, also $K_{\mathbf{x},r} \subset M$. Ein Punkt $\mathbf{x} \in M$ heißt innerer Punkt der Menge M, wenn eine Umgebung $K_{x,r}$ existiert, die ganz in der Menge M liegt. Die Menge aller inneren Punkte der Menge M bezeichnen wir mit $\mathring{M}$.

Definition 5.4: (Häufungspunkt)

Ein Punkt $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ heißt Häufungspunkt der Menge $M \subset \mathbb{R}^n$, wenn in jeder Umgebung des Punktes $\mathbf{x}_0$, also in $K_{\mathbf{x}_0,r}$, $r > 0$ beliebig, ein Punkt der Menge M liegt. Das bedeutet

$$M \cap K_{\mathbf{x}_0,r} \neq \emptyset \quad \text{für alle } r > 0.$$

Punktmengen im $\mathbb{R}^n$

Buch Kap. 5.1

Beispiele

a) $\overline{K_{0,1}}$

$\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}$ sind keine inneren Punkte

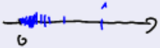
Die Menge aller inneren Punkte ist $K_{0,1} = \left\{ \begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} : \sqrt{x_1^2+x_2^2} < 1 \right\}$

Die Menge aller Häufungspunkte von $\overline{K_{0,1}}$ ist $\overline{K_{0,1}}$

b) $K_{0,1}$: innere Punkte $K_{0,1}$

Häufungspunkte $\overline{K_{0,1}}$

c) $M = \{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \}$



$\mathring{M} = \emptyset$

Häufungspunkte $M \cup \{0\}$

Punktmengen im $\mathbb{R}^n$

Buch Kap. 5.1

Definition 5.5: (Randpunkt)

Ein Punkt $\mathbf{x}_r$ heißt Randpunkt der Menge M, falls in jeder Umgebung $K_{\mathbf{x},r}$ sowohl mindestens ein Punkt der Menge M liegt als auch ein Punkt des $\mathbb{R}^n$, der nicht in der Menge M liegt. Die Menge aller Randpunkte einer Menge bezeichnet man mit ∂M.

Definition 5.6: (abgeschlossene Menge)

M heißt abgeschlossen, falls sie alle ihre Randpunkte enthält.

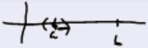
Definition 5.7: (berschränkt, kompakt)

Die Menge $M \subset \mathbb{R}^n$ heißt beschränkt, falls es eine Konstante $C > 0$ gibt, so dass

$$|\mathbf{x}| \leq C, \quad \text{für alle} \quad \mathbf{x} \in M.$$

Die Menge $M \subset \mathbb{R}^n$ heißt kompakt, falls sie beschränkt und abgeschlossen ist.

Beispiele



a) $a < b \in \mathbb{R}$

$M = (a,b)$ $\qquad \partial M = \{a,b\}$

$\mathring{M} = (a,b)$ $\qquad$ Häufungspunkte $[a,b]$

M ist offen, aber nicht abgeschlossen

b) $M = (a,b]$ $\qquad \partial M = \{a,b\}$

$\mathring{M} = (a,b)$ $\qquad$ Häufungspunkte $[a,b]$

M ist weder offen noch abgeschlossen

c) $M = [a,b)$ wie b)

d) $M = [a,b]$ $\qquad \mathring{M} = (a,b)$ $\qquad \partial M = \{a,b\}$, Häufungspunkte $[a,b]$

M ist abg. aber nicht offen.

Punktmengen im $\mathbb{R}^n$

Buch Kap. 5.1

Beispiele

Kurven und Wege im $\mathbb{R}^n$ (Rückblick Analysis II)

Buch Kap. 2.12

Definition 2.30 (vergl. Def. 5.13): (Kurve und Weg im $\mathbb{R}^n$)

Sei $G \subset \mathbb{R}^n$ und $[a, b] \subset \mathbb{R}$ ein abgeschlossenes Intervall.
Eine Abbildung

$$\mathbf{x} : [a, b] \to G, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} =: (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$$

mit stetigen und stückweise stetig differenzierbaren (bzw. stetig differenzierbaren) Funktionen $x_i : [a, b] \to \mathbb{R}$ $(i = 1, \ldots, n)$ heißt **Weg** (bzw. **Kurve**) in G mit dem Anfangspunkt
$\mathbf{x}(a) = (x_1(a), x_2(a), \ldots, x_n(a))^T$, dem Endpunkt
$\mathbf{x}(b) = (x_1(b), x_2(b), \ldots, x_n(b))^T$ und der Spur $\{\mathbf{x}(t) \mid a \le t \le b\}$.

Kurven und Wege im $\mathbb{R}^n$ (Rückblick Analysis II)

Buch Kap. 5.1

Definition 5.8: (Verbindungsstrecke, Polygonzug)

Die Menge

$$[\mathbf{x}, \mathbf{y}] := \{\mathbf{z} \,|\, \mathbf{z} = \mathbf{x} + s(\mathbf{y} - \mathbf{x}),\ s \in [0, 1]\}$$

heißt Verbindungsstrecke der Punkte $\mathbf{x}$ und $\mathbf{y}$.

Mit

$$[\mathbf{x}_0, ..., \mathbf{x}_p] = \cup_{j=1}^{p} [\mathbf{x}_{j-1}, \mathbf{x}_j]$$

bezeichnet man einen Polygonzug, der die Punkte $\mathbf{x}_0, ..., \mathbf{x}_p$ jeweils durch Verbindungsstrecken verbindet.

Der Polygonzug ist ein Weg.

Kurven im $\mathbb{R}^n$ (Rückblick Analysis II)

Buch Kap. 5.1

Beispiele

Definition 5.8: (konvex, zusammenhängend)

Eine Menge M heißt zusammenhängend, falls zwei beliebige Punkte $\mathbf{x}$ und $\mathbf{y}$ durch einen ganz in M verlaufenden Weg verbunden werden können.

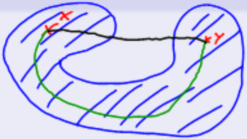
Eine Menge heißt konvex, falls mit $\mathbf{x}$ und $\mathbf{y}$ aus M die Verbindungsstrecke $[\mathbf{x}, \mathbf{y}]$ ganz in M liegt.

Eine offene und zusammenhängende Menge heißt Gebiet.

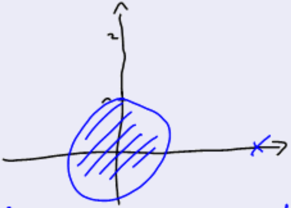
Beachte: M konvex $\Rightarrow$ M zusammenhängend
$\not\Leftarrow$

Punktmengen im $\mathbb{R}^n$

Beispiele

a) $M =$  $\subset \mathbb{R}^2$ ist zusammenhängend aber nicht konvex

b) $\overline{K}_{0,1} \cup \left\{\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}\right\}$



ist nicht zusammenhängend, da kein Weg von $\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}$ wegführt

c) $\emptyset$ konvex

Punktmengen im $\mathbb{R}^n$

Buch Kap. 5.1

Beispiele

Folgen im $\mathbb{R}^n$

Buch Kap. 5.1

Definition 5.9: (Folge in $\mathbb{R}^n$)

Sei $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^n$ eine Zuordnungsvorschrift (Abbildung), die jeder natürlichen Zahl k genau ein Element $\mathbf{a}_k \in \mathbb{R}^n$ zuordnet. Den Wertebereich dieser Abbildung nennen wir Folge im $\mathbb{R}^n$ und bezeichnen ihn durch

$$(\mathbf{a}_k)_{k\in\mathbb{N}} \qquad \text{bzw.} \quad \text{abkürzend durch} \qquad (\mathbf{a}_k)\ .$$

Folgen im $\mathbb{R}^n$

Buch Kap. 5.1

Definition 5.10: (Limes in $\mathbb{R}^n$)

Sei $(\mathbf{a}_k)$, $k \in \mathbb{N}$, eine Folge im $\mathbb{R}^n$. $\mathbf{a}_0 \in \mathbb{R}^n$ heißt Grenzwert oder Limes von $(\mathbf{a}_k)$ falls für jede Zahl $\epsilon > 0$ ein Index $k_0 \in \mathbb{N}$ existiert, so dass

$$|\mathbf{a}_k - \mathbf{a}_0| < \epsilon \qquad \text{für alle} \quad k \geq k_0$$

gilt.
Wir schreiben dafür

$$\mathbf{a}_0 = \lim_{k\to\infty} \mathbf{a}_k \quad \text{oder} \quad \mathbf{a}_k \to \mathbf{a}_0 \text{ für } k \to \infty.$$

Folgen im $\mathbb{R}^n$

Satz 5.1: (Limes in $\mathbb{R}^n$)

Der Grenzwert einer Folge im $\mathbb{R}^n$ existiert genau dann, wenn die Grenzwerte der Koordinatenfolgen existieren. Für den Grenzwert $\mathbf{a}_0$ der Folge $(\mathbf{a}_k)$ gilt dann

$$\mathbf{a}_0 = \lim_{k\to\infty} \mathbf{a}_k = \begin{pmatrix} \lim_{k\to\infty} a_{1k} \\ \lim_{k\to\infty} a_{2k} \\ \vdots \\ \lim_{k\to\infty} a_{nk} \end{pmatrix} .$$