Analysis III für
Studierende der Ingenieurwissenschaften

Prof. Dr. Timo Reis
Fachbereich Mathematik, Universität Hamburg

Technische Universität Hamburg-Harburg
Wintersemester 2018/2019

Allgemeine Informationen

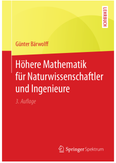
Informationsquellen

- https://www.math.uni-hamburg.de/teaching/export/tuhh/cm/a3/1819/
- http://webcast.tu-harburg.de/Mediasite/Play/2c0fd6aa8cb14a919e076981161e081d1d
- **Übungen in Tutorgruppen** (14-täglich, ab 22.10.2018)
  Dr. Hanna Peywand Kiani und ÜbungsgruppenleiterInnen
- **Hörsaalübungen** (14-täglich, ab 29.10.2018)
  Montag, 12:30–14:00 Uhr, Audimax I
  Dr. Hanna Peywand Kiani.
- **Sprechstunde Prof. Reis**
  Dienstag, E 3.079, 13:30–14:30

Literatur

PRIMÄR:

G. Bärwolff: **Höhere Mathematik für Naturwissenschaftler und Ingenieure**,
3. Auflage. Springer 2017
`http://www.springer.com/de/book/9783662550212`



SEKUNDÄR:

R. Ansorge, H. J. Oberle: Mathematik für Ingenieure 2,
3. Auflage. WILEY-VCH, 2011.

FORMELSAMMLUNG:

K. Vetters: **Formeln und Fakten im Grundkurs Mathematik**, Vieweg+Teubner, 2004

Inhalt der Analysis III

1. Punktmengen im $\mathbb{R}^n$
2. Differenzierbarkeit und Taylorformeln im $\mathbb{R}^n$
3. Extrema mit und ohne Nebenbedingungen
4. Rotation, Gradient, Divergenz
5. Integration im Mehrdimensionalen, Transformationsformel, Oberflächenintegrale
6. Sätze von Green, Gauß und Stokes

Punktmengen und Stetigkeit im $\mathbb{R}^n$

Punktmengen im $\mathbb{R}^n$

Definition 5.1: (Länge, Abstand)

Sei $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.

$$|\mathbf{x}| := \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2} \text{ heißt Länge von } \mathbf{x},$$

$$d := |\mathbf{x} - \mathbf{y}| \text{ heißt Abstand zwischen } \mathbf{x} \text{ und } \mathbf{y}.$$

Definition 5.2: (Kugelumgebungen)

Die Menge

$$K_{\mathbf{x}_0,r} := \{\mathbf{x} |\, |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0| < r,\ r \in \mathbb{R}, r > 0\}$$

heißt **offene Kugelumgebung** des Punktes $\mathbf{x}_0$ mit dem Radius r,

$$\overline{K}_{\mathbf{x}_0,r} := \{\mathbf{x} |\, |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0| \leq r,\ r \in \mathbb{R}, r > 0\}$$

entsprechende **abgeschlossene Kugelumgebung** des Punktes $\mathbf{x}_0$ mit dem Radius r.

Beispiele

Punktmengen im $\mathbb{R}^n$

Buch Kap. 5.1

Definition 5.3: (offen, innerer Punkt)

$M \subset \mathbb{R}^n$ heißt offen, wenn zu jedem Element $\mathbf{x} \in M$ eine Umgebung $K_{\mathbf{x},r}$ gefunden werden kann, die in der Menge M liegt, also $K_{\mathbf{x},r} \subset M$. Ein Punkt $\mathbf{x} \in M$ heißt innerer Punkt der Menge M, wenn eine Umgebung $K_{x,r}$ existiert, die ganz in der Menge M liegt. Die Menge aller inneren Punkte der Menge M bezeichnen wir mit $\mathring{M}$.

Definition 5.4: (Häufungspunkt)

Ein Punkt $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ heißt Häufungspunkt der Menge $M \subset \mathbb{R}^n$, wenn in jeder Umgebung des Punktes $\mathbf{x}_0$, also in $K_{\mathbf{x}_0,r}$, $r > 0$ beliebig, ein Punkt der Menge M liegt. Das bedeutet

$$M \cap K_{\mathbf{x}_0,r} \neq \emptyset \quad \text{für alle } r > 0.$$

Punktmengen im $\mathbb{R}^n$

Beispiele

Punktmengen im $\mathbb{R}^n$

Buch Kap. 5.1

Definition 5.5: (Randpunkt)

Ein Punkt $\mathbf{x}_r$ heißt Randpunkt der Menge M, falls in jeder Umgebung $K_{\mathbf{x},r}$ sowohl mindestens ein Punkt der Menge M liegt als auch ein Punkt des $\mathbb{R}^n$, der nicht in der Menge M liegt. Die Menge aller Randpunkte einer Menge bezeichnet man mit ∂M.

Definition 5.6: (abgeschlossene Menge)

M heißt abgeschlossen, falls sie alle ihre Randpunkte enthält.

Definition 5.7: (berschränkt, kompakt)

Die Menge $M \subset \mathbb{R}^n$ heißt beschränkt, falls es eine Konstante $C > 0$ gibt, so dass

$$|\mathbf{x}| \leq C, \quad \text{für alle} \quad \mathbf{x} \in M.$$

Die Menge $M \subset \mathbb{R}^n$ heißt kompakt, falls sie beschränkt und abgeschlossen ist.

Beispiele

Beispiele

Kurven und Wege im $\mathbb{R}^n$ (Rückblick Analysis II)

Buch Kap. 2.12

Definition 2.30 (vergl. Def. 5.13): (Kurve und Weg im $\mathbb{R}^n$)

Sei $G \subset \mathbb{R}^n$ und $[a, b] \subset \mathbb{R}$ ein abgeschlossenes Intervall.
Eine Abbildung

$$\mathbf{x} : [a, b] \to G, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} =: (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$$

mit stetigen und stückweise stetig differenzierbaren (bzw. stetig differenzierbaren) Funktionen $x_i : [a, b] \to \mathbb{R}$ $(i = 1, \dots, n)$ heißt Weg (bzw. Kurve) in G mit dem Anfangspunkt
$\mathbf{x}(a) = (x_1(a), x_2(a), \dots, x_n(a))^T$, dem Endpunkt
$\mathbf{x}(b) = (x_1(b), x_2(b), \dots, x_n(b))^T$ und der Spur $\{\mathbf{x}(t) \,|\, a \le t \le b\}$.

Kurven und Wege im $\mathbb{R}^n$ (Rückblick Analysis II)

Buch Kap. 5.1

Definition 5.8: (Verbindungsstrecke, Polygonzug)

Die Menge

$$[\mathbf{x}, \mathbf{y}] := \{\mathbf{z} \,|\, \mathbf{z} = \mathbf{x} + s(\mathbf{y} - \mathbf{x}),\ s \in [0, 1]\}$$

heißt Verbindungsstrecke der Punkte $\mathbf{x}$ und $\mathbf{y}$.

Mit

$$[\mathbf{x}_0, ..., \mathbf{x}_p] = \cup_{j=1}^{p} [\mathbf{x}_{j-1}, \mathbf{x}_j]$$

bezeichnet man einen Polygonzug, der die Punkte $\mathbf{x}_0, ..., \mathbf{x}_p$ jeweils durch Verbindungsstrecken verbindet.

Der Polygonzug ist ein Weg.

Kurven im $\mathbb{R}^n$ (Rückblick Analysis II)

Buch Kap. 5.1

Beispiele

Definition 5.8: (konvex, zusammenhängend)

Eine Menge M heißt zusammenhängend, falls zwei beliebige Punkte $\mathbf{x}$ und $\mathbf{y}$ durch einen ganz in M verlaufenden Weg verbunden werden können.

Eine Menge heißt konvex, falls mit $\mathbf{x}$ und $\mathbf{y}$ aus M die Verbindungsstrecke $[\mathbf{x}, \mathbf{y}]$ ganz in M liegt.

Eine offene und zusammenhängende Menge heißt Gebiet.

Beispiele

Punktmengen im $\mathbb{R}^n$

Beispiele

Folgen im $\mathbb{R}^n$

Definition 5.9: (Folge in $\mathbb{R}^n$)

Sei $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^n$ eine Zuordnungsvorschrift (Abbildung), die jeder natürlichen Zahl k genau ein Element $\mathbf{a}_k \in \mathbb{R}^n$ zuordnet. Den Wertebereich dieser Abbildung nennen wir Folge im $\mathbb{R}^n$ und bezeichnen ihn durch

$$(\mathbf{a}_k)_{k\in\mathbb{N}} \qquad \text{bzw.} \quad \text{abkürzend durch} \qquad (\mathbf{a}_k)\ .$$

Definition 5.10: (Limes in $\mathbb{R}^n$)

Sei $(\mathbf{a}_k)$, $k \in \mathbb{N}$, eine Folge im $\mathbb{R}^n$. $\mathbf{a}_0 \in \mathbb{R}^n$ heißt Grenzwert oder Limes von $(\mathbf{a}_k)$ falls für jede Zahl $\epsilon > 0$ ein Index $k_0 \in \mathbb{N}$ existiert, so dass

$$|\mathbf{a}_k - \mathbf{a}_0| < \epsilon \qquad \text{für alle} \quad k \geq k_0$$

gilt.
Wir schreiben dafür

$$\mathbf{a}_0 = \lim_{k\to\infty} \mathbf{a}_k \quad \text{oder} \quad \mathbf{a}_k \to \mathbf{a}_0 \text{ für } k \to \infty.$$

Folgen im $\mathbb{R}^n$

Buch Kap. 5.1

Satz 5.1: (Limes in $\mathbb{R}^n$)

Der Grenzwert einer Folge im $\mathbb{R}^n$ existiert genau dann, wenn die Grenzwerte der Koordinatenfolgen existieren. Für den Grenzwert $\mathbf{a}_0$ der Folge $(\mathbf{a}_k)$ gilt dann

$$\mathbf{a}_0 = \lim_{k\to\infty} \mathbf{a}_k = \begin{pmatrix} \lim_{k\to\infty} a_{1k} \\ \lim_{k\to\infty} a_{2k} \\ \vdots \\ \lim_{k\to\infty} a_{nk} \end{pmatrix} .$$

Beispiele

Abbildungen

Buch Kap. 5.1

Definition 5.11: (Abbildung)

Unter einer Abbildung

$$\mathbf{f}: D \to \mathbb{R}^m, \ D \subset \mathbb{R}^n, \ n, m \in \mathbb{N},$$

verstehen wir eine Zuordnungsvorschrift, die jedem $\mathbf{x} \in D$ genau ein Element $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$ zuordnet, wobei wir die Schreibweise $\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ verwenden.
D heißt Definitionsbereich der Abbildung **f**.

$$W = \mathbf{f}(D) := \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m | \text{es existiert ein } \ \mathbf{x} \in D \ \text{ mit } \ \mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x})\}$$

heißt Wertebereich der Abbildung **f**.

Graph einer Funktion

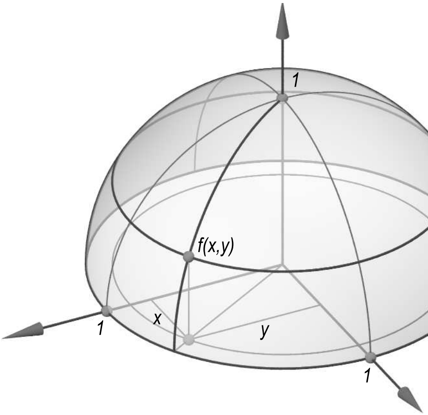


Abbildung 5.8: Graph der Abbildung
$z = f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2},\ D := \{(x, y)^T \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$

Abbildungen

Buch Kap. 5.8

Beispiele

Definition 5.30: (Niveaumenge)

Sei die Funktion $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^n$, gegeben. Unter einem Niveau a der Funktion f verstehen wir alle Punkte $\mathbf{x} \in D$ mit $f(\mathbf{x}) = a = \mathrm{const}$.

Diese Punktmenge bezeichnet man auch als Niveaumenge. Ist diese Menge ein Weg, so nennt man sie Niveau- oder Höhenlinie.

Graph einer Funktion

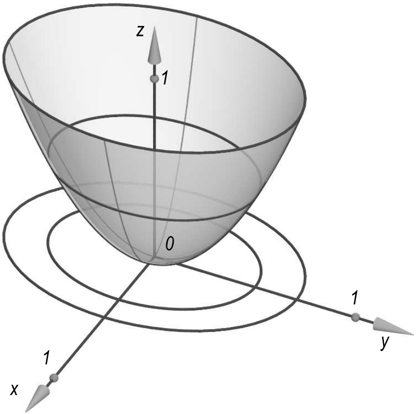


Abbildung 5.19: Graph einer Funktion und Niveaulinien

Stetigkeit von Abbildungen

Definition 5.20: (Stetigkeit einer Funktion)

Sei $f : D \to \mathbb{R}, \; D \subset \mathbb{R}^n$.

a) f heißt stetig in $\mathbf{x}_0 \in D$, falls für alle Folgen $(\mathbf{x}_k) \subset D$ $(k \in \mathbb{N})$ aus $\lim_{k\to\infty} \mathbf{x}_k = \mathbf{x}_0$ die Beziehung

$$\lim_{k\to\infty} f(\mathbf{x}_k) = f(\mathbf{x}_0)$$

folgt.

b) f heißt stetig auf $A \subset D$, falls für alle $\mathbf{x} \in A$ gilt: f ist stetig in $\mathbf{x}$.

c) f heißt stetig, falls f auf dem gesamten Definitionsbereich D stetig ist.

Stetigkeit von Abbildungen

Buch Kap. 5.4

Definition 5.21: (Stetigkeit einer Funktion)

Sei $\mathbf{f} : D \to \mathbb{R}^m,\ D \subset \mathbb{R}^n,\ \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} f_1(\mathbf{x}) \\ f_2(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ f_m(\mathbf{x}) \end{pmatrix}$.

$\mathbf{f}$ heißt stetig in $\mathbf{x}_0 \in D$, stetig auf $A \subset D$ bzw. stetig, falls f_j stetig in $\mathbf{x}_0 \in D$, stetig auf $A \subset D$ bzw. stetig ist für alle $j = 1, 2, \ldots, m$.

Stetigkeit von Abbildungen

Buch Kap. 5.4

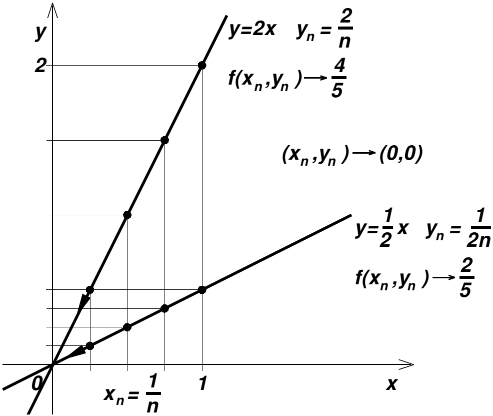


Abbildung 5.15: Unstetigkeitsstelle $(0, 0)$ der Funktion

$$f(x, y) := \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}, & (x, y) \neq 0, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Beispiele

Minimum und Maximum

Buch Kap. 5.4

Definition 5.22: (Minimum und Maximum)

M heißt Maximum der Funktion $f : D \to \mathbb{R}$, falls

$$f(\mathbf{x}) \leq M \quad \text{für alle} \quad \mathbf{x} \in D$$

gilt und falls es ein $\mathbf{x}_M \in D$ mit $f(\mathbf{x}_M) = M$ gibt.

m heißt Minimum der Funktion $f : D \to \mathbb{R}$, falls

$$f(\mathbf{x}) \geq m \quad \text{für alle} \quad \mathbf{x} \in D$$

gilt und falls es ein $\mathbf{x}_m \in D$ mit $f(\mathbf{x}_m) = m$ gibt.

Minimum und Maximum auf kompakten Mengen

Buch Kap. 5.4

Satz 5.2: (Stetige Funktion auf Kompaktum)

Sei $f : D \to \mathbb{R},\ D \subset \mathbb{R}^n$ eine stetige Funktion und $D \subset \mathbb{R}^n$ eine kompakte Menge, dann nimmt f auf D Maximum und Minimum an.

Minimum und Maximum auf kompakten Mengen

Buch Kap. 5.4

Beispiele

Differenzierbarkeit im $\mathbb{R}^n$

Partielle Ableitungen

Buch Kap. 5.5

Definition 5.23: (partielle Differenzierbarkeit)

Sei die Funktion $f : D \to \mathbb{R}, \; D \subset \mathbb{R}^n$, wobei D eine offene Menge ist, gegeben. Existiert der Grenzwert

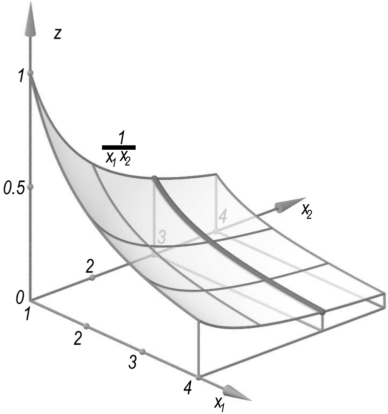
$$\lim_{h \to 0} \frac{f(\mathbf{x} + h\mathbf{e}_j) - f(\mathbf{x})}{h},$$

dann ist die Funktion f an der Stelle $\mathbf{x}$ partiell differenzierbar nach x_j und durch den Grenzwert

$$\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_j} := \lim_{h \to 0} \frac{f(\mathbf{x} + h\mathbf{e}_j) - f(\mathbf{x})}{h}$$

ist die **partielle Ableitung** nach x_j von f an der Stelle $\mathbf{x}$ definiert.

Partielle Ableitungen



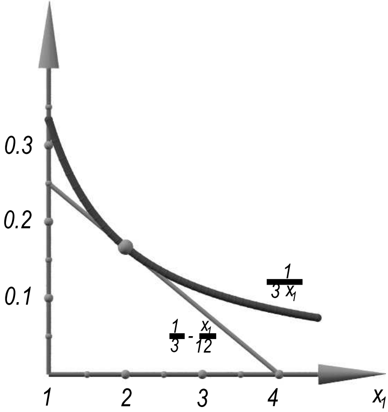


Abbildung 5.16: Graph von $f(x_1, x_2) = \frac{1}{x_1 x_2}$, Abbildung 5.17: Graph von $f^*(x_1) := f(x_1, 3) = \frac{1}{3x_1}$ einschließlich Tangente an f^*.

Partielle Ableitungen

Buch Kap. 5.5

Beispiele

Partielle Ableitungen

Buch Kap. 5.5

Beispiele

Partielle Ableitungen

Buch Kap. 5.5

Definition 5.24: (partielle Differenzierbarkeit)

$f : D \to \mathbb{R}$ ist auf $A \subset D,\ A$ offen, partiell differenzierbar nach x_j, falls f in allen Punkten $\mathbf{x} \in A$ partiell nach x_j differenzierbar ist.
f ist partiell nach x_j differenzierbar, falls f auf D partiell nach x_j differenzierbar ist.
Für die partielle Ableitung nach x_j wird auch die Bezeichnung f_{x_j} verwendet.
f heißt partiell differenzierbar, falls alle partiellen Ableitungen existieren.

Partielle Ableitungen

Definition 5.25: (partielle Differenzierbarkeit)

$f : D \to \mathbb{R},\ D \subset \mathbb{R}^n$ offen, heißt in D stetig partiell differenzierbar, falls in D alle partiellen Ableitungen existieren und zugleich stetig sind.

Gradient

Gradient

Sei $f : D \to \mathbb{R},\ D \subset \mathbb{R}^n$ offen, f partiell differenzierbar.
Der Vektor

$$\operatorname{grad} f(\mathbf{x}) := \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{x}) \\ \frac{\partial f}{\partial x_2}(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{x}) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

heißt Gradient der Funktion f bei x.
Die Abbildung $\operatorname{grad} f : D \to \mathbb{R}^n$ ist eine vektorwertige Abbildung, d.h. jedem $\mathbf{x} \in D$ wird mit $\operatorname{grad} f(\mathbf{x})$ ein Vektor aus dem $\mathbb{R}^n$ zugeordnet.

Gradient

Beispiele

Höhere partielle Ableitungen

Definition 5.26: (höhere partielle Ableitungen)

Sei $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^n$ offen, f partiell differenzierbar. Falls die partielle Ableitung

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)$$

existiert, heißt

$$f_{x_i x_j}(\mathbf{x}) := \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)(\mathbf{x})$$

zweite partielle Ableitung von f nach x_j und x_i.
Existieren alle zweiten partiellen Ableitungen $f_{x_i x_j}$ für $i, j = 1, 2, ..., n$, heißt f zweimal partiell differenzierbar.
Höhere partielle Ableitungen ($k-$te partielle Ableitungen oder auch partielle Ableitungen k-ter Ordnung) werden entsprechend rekursiv definiert;

$$\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \ldots \partial x_{i_k}}(x) =: f_{x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_k}}(x), \quad mit \quad 1 \leq k \leq p.$$

Höhere partielle Ableitungen

Beispiele

Höhere partielle Ableitungen

Buch Kap. 5.5

Satz 5.3: (höhere partielle Ableitungen)

Ist eine Funktion $f : D \to \mathbb{R},\ D \subset \mathbb{R}^n$, $p-$ mal stetig partiell differenzierbar, so ist

$$\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \ldots \partial x_{i_k}} = f_{x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_k}}, \quad mit \quad 1 < k \leq p,$$

unabhängig von der Reihenfolge der $x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_k}$. Die Indizes $i_1, i_2, \ldots, i_k$ sind dabei beliebige Elemente der Menge $\{1, 2, \ldots, n\}$.

Höhere partielle Ableitungen

Buch Kap. 5.5

Beispiele

Höhere partielle Ableitungen

Beispiele

Partielle Ableitungen

Buch Kap. 5.5

Definition 5.27: partielle Differenzierbarkeit für vektorwertige Funktionen

Sei $\mathbf{f} : D \to \mathbb{R}^m,\ D \subset \mathbb{R}^n$ offenen, $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} f_1(\mathbf{x}) \\ f_2(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ f_m(\mathbf{x}) \end{pmatrix}$.

$\mathbf{f}$ ist partiell differenzierbar in $\mathbf{x}_0 \in D$, partiell differenzierbar auf $A \subset D$ bzw. partiell differenzierbar, falls alle f_j ($j = 1, 2, \ldots, n$) partiell differenzierbar in $\mathbf{x}_0 \in D$, partiell differenzierbar auf $A \subset D$ bzw. partiell differenzierbar sind.

Höhere partielle Ableitungen

Buch Kap. 5.5

Beispiele

Partielle Ableitungen

Buch Kap. 5.6

JACOBI-Matrix

Sei $\mathbf{f} : D \to \mathbb{R}^m$, $D \subset \mathbb{R}^n$, in $\mathbf{x}_0$ partiell differenzierbar, dann heißt die Matrix

$$J_{\mathbf{f}}(\mathbf{x}_0) := \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\mathbf{x}_0) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\mathbf{x}_0) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\mathbf{x}_0) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\mathbf{x}_0) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(\mathbf{x}_0) & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(\mathbf{x}_0) \\ \vdots & & & \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(\mathbf{x}_0) & \frac{\partial f_m}{\partial x_2}(\mathbf{x}_0) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(\mathbf{x}_0) \end{pmatrix}$$

JACOBI-Matrix bzw. Ableitungsmatrix oder einfach Ableitung von $\mathbf{f}$ in $\mathbf{x}_0$.

JACOBI-Matrix

Buch Kap. 5.6

Beispiele

Partielle Ableitungen

Buch Kap. 5.6

Hesse-Matrix

Die Hesse-Matrix einer Funktion $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ist gegeben durch

$$H_f(\mathbf{x}) := \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1}(\mathbf{x}) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(\mathbf{x}) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(\mathbf{x}) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(\mathbf{x}) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_2}(\mathbf{x}) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n}(\mathbf{x}) \\ \vdots & & & \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(\mathbf{x}) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2}(\mathbf{x}) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_n}(\mathbf{x}) \end{pmatrix}.$$

Hesse-Matrix

Buch Kap. 5.6

Beispiele

HESSE-Matrix

Beispiele

Definition 5.28: Differenzierbarkeit

Eine Abbildung $\mathbf{f} : D \to \mathbb{R}^m,\ D \subset \mathbb{R}^n$, heißt in einem inneren Punkt $\mathbf{x}_0$ von D differenzierbar, falls sie in $\mathbf{x}_0$ partiell differenzierbar ist und in der Form

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{x}_0) + \mathbf{f}'(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) + \mathbf{k}(\mathbf{x})$$

geschrieben werden kann, wobei $\mathbf{f}'(\mathbf{x}_0) \in \mathbb{R}^{m\times n}$ und $\mathbf{k} : D \to \mathbb{R}^m$ eine Abbildung ist, für die

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} \frac{|\mathbf{k}(\mathbf{x})|}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|} = 0$$

gilt.

$\mathbf{f}$ heißt differenzierbar in $A \subset D$, falls $\mathbf{f}$ in jedem Punkt von A differenzierbar ist. Im Falle $A = D$ heißt $\mathbf{f}$ eine differenzierbare Abbildung.

Beispiele

Differenzierbarkeit versus partielle Differenzierbarkeit

Buch Kap. 5.7

Satz 5.4: Differenzierbarkeit versus partielle Differenzierbarkeit

Sei $\mathbf{f} : D \to \mathbb{R}^m$ mit $D \subset \mathbb{R}^n$ offen.

- Wenn $\mathbf{f} : D \to \mathbb{R}^m,\ D \subset \mathbb{R}^n$ differenzierbar in $\mathbf{x}_0$ ist, dann ist $\mathbf{f}$ auch stetig in $\mathbf{x}_0$.
- Wenn $\mathbf{f} : D \to \mathbb{R}^m,\ D \subset \mathbb{R}^n$ differenzierbar in $\mathbf{x}_0$ ist, dann ist $\mathbf{f}$ auch partiell differenzierbar. In dem Fall ist die Ableitung gleich der JACOBI-Matrix, also
$$J_{\mathbf{f}}(\mathbf{x}_0) = \mathbf{f}'(\mathbf{x}_0).$$
- Ist $\mathbf{f}$ stetig partiell differenzierbar in einer Umgebung von in $\mathbf{x}_0$, so ist $\mathbf{f}$ differenzierbar in $\mathbf{x}_0$.

Differenzierbarkeit versus partielle Differenzierbarkeit

Buch Kap. 5.7

Beispiele

Differentiationsregeln

Differentiationsregeln

(i) Linearität
Sind $\mathbf{f} : D \to \mathbb{R}^m$ und $\mathbf{g} : D \to \mathbb{R}^m,\ D \subset \mathbb{R}^n$, differenzierbar in $\mathbf{x}_0$, so ist auch $\lambda\mathbf{f} + \mu\mathbf{g}$ (λ und μ reell) in $\mathbf{x}_0$ differenzierbar und es gilt

$$(\lambda\mathbf{f} + \mu\mathbf{g})'(\mathbf{x}_0) = \lambda\mathbf{f}'(\mathbf{x}_0) + \mu\mathbf{g}'(\mathbf{x}_0)\ .$$

(ii) Kettenregel
Es sei $\mathbf{h} : C \to D$, (mit $C \subset \mathbb{R}^n$, $D \subset \mathbb{R}^p$) differenzierbar in $\mathbf{x}_0 \in C$ und $\mathbf{f} : D \to \mathbb{R}^m$ differenzierbar im Punkt $\mathbf{z}_0 = \mathbf{h}(\mathbf{x}_0)$.
Dann ist auch $\mathbf{f} \circ \mathbf{h} : C \to \mathbb{R}^m$ in $\mathbf{x}_0$ differenzierbar und es gilt

$$(\mathbf{f} \circ \mathbf{h})'(\mathbf{x}_0) = \mathbf{f}'(\mathbf{z}_0)\mathbf{h}'(\mathbf{x}_0)\ .$$

Kettenregel

Buch Kap. 5.8

$$
\begin{tikzcd}
R^n \arrow[rr, "f \circ h"] \arrow[dr, "h"'] & & R^m \\
& R^p \arrow[ur, "f"'] &
\end{tikzcd}
$$

x_0

$z_0 = h(x_0)$

$$f(z_0) = f(h(x_0)) = f \circ h(x_0)$$

Abbildung 5.18: Verkettete Abbildungen (Kettenregel)

Differentiationsregeln

Buch Kap. 5.7

Beispiele

Beispiele

Richtungsableitung

Buch Kap. 5.8

Definition 5.29: Richtungsableitung

Seien $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subset R^n$ und ein Vektor $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ mit $|\mathbf{a}| = 1$ gegeben. Existiert der Grenzwert

$$\lim_{t\to 0} \frac{1}{t}[f(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{a}) - f(\mathbf{x}_0)] \ ,$$

dann nennt man

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{a}}(\mathbf{x}_0) := \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}[f(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{a}) - f(\mathbf{x}_0)]$$

die Richtungsableitung der Funktion f an der Stelle $\mathbf{x}_0$ in Richtung $\mathbf{a}$.

Richtungsableitung

Beispiele

Richtungsableitung

Buch Kap. 5.8

Satz 5.5: Richtungsbleitung und Gradient

Sind die partiellen Ableitungen von f in $\mathbf{x}_0$ stetig (woraus die Differenzierbarkeit von f in $\mathbf{x}_0$ folgt), dann gilt für die Richtungsableitung von f in Richtung $\mathbf{a}$

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{a}}(\mathbf{x}_0) = \operatorname{grad} f(\mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{a} \ .$$

Richtungsableitung

Buch Kap. 5.8

Beispiele

TAYLOR–Formel in $\mathbb{R}^n$

Multi-Indizes

Für ein n-Tupel $\alpha = (\alpha_l, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}_0^n$ sei

$$\begin{aligned} |\alpha| &:= \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n, \\ \alpha! &:= \alpha_1! \cdot \alpha_2! \cdot \dots \cdot \alpha_n!, \\ h^\alpha &:= h_1^{\alpha_1} \cdot h_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot h_n^{\alpha_n}. \end{aligned}$$

Ist f eine $|\alpha|$-mal stetig differenzierbare Funktion, so setzt man

$$\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial^\alpha \mathbf{x}} f := \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial^{\alpha_1} x_1 \cdots \partial^{\alpha_n} x_n} f.$$

Multi-Indizes, Beispiele

TAYLOR–Formel in $\mathbb{R}^n$

Satz 5.6: TAYLOR–Formel in $\mathbb{R}^n$

Die Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ mit $D \subset \mathbb{R}^n$ offen sei $(p+1)$–mal stetig partiell differenzierbar, und die Strecke $[\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_0 + \mathbf{h}]$ von $\mathbf{x}_0$ und $\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}$ liege komplett in D. Dann gilt die TAYLOR-Formel

$$f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) = \sum_{|\alpha| \leq p} \frac{\frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial^\alpha x}(\mathbf{x}_0)}{\alpha!} \cdot \mathbf{h}^\alpha + R(\mathbf{x}_0, \mathbf{h})$$

mit dem Restglied

$$R(\mathbf{x}_0, \mathbf{h}) = \sum_{|\alpha| = p+1} \frac{\frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial^\alpha x}(\mathbf{x}_0 + \theta \mathbf{h})}{\alpha!} \cdot \mathbf{h}^\alpha .$$

TAYLOR–Formel in $\mathbb{R}^n$

Definition 5.32: TAYLOR–Polynom

Die Funktion $f : D \to \mathbb{R},\ D \subset \mathbb{R}^n$ sei $(p+1)$–mal stetig partiell differenzierbar, und $[\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_0 + \mathbf{h}]$ sei eine im Inneren von D liegende Strecke. Dann heißt

$$T_p(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) := \sum_{|\alpha| \leq p} \frac{\frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial^\alpha x}(\mathbf{x}_0)}{\alpha!} \cdot \mathbf{h}^\alpha$$

TAYLOR–Polynom p–ten Grades der Funktion $f(\mathbf{x})$ zum Entwicklungspunkt $\mathbf{x}_0$.

TAYLOR−Formel in $\mathbb{R}^n$

Buch Kap. 5.11

Beispiele

TAYLOR−Formel in $\mathbb{R}^n$

Beispiele

Beispiele

Mittelwertsatz

Satz 5.7: Mittelwertsatz

Ist $f : D \to \mathbb{R},\ D \subset \mathbb{R}^n$ einmal stetig partiell differenzierbar, und ist $[\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_0 + \mathbf{h}]$ eine im Inneren von D liegende Strecke. Dann gibt es eine Zahl θ mit $0 < \theta < 1$, so dass

$$f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) - f(\mathbf{x_0}) = h_1 f_{x_1}(\mathbf{x}_0 + \theta\mathbf{h}) + h_2 f_{x_2}(\mathbf{x}_0 + \theta\mathbf{h}) + \dots \\ \dots + h_n f_{x_n}(\mathbf{x}_0 + \theta\mathbf{h}).$$

Es gilt die Abschätzung

$$|f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) - f(\mathbf{x}_0)| \leq |\mathbf{h}| \max_{0 \leq s \leq 1} \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |f_{x_i}(\mathbf{x}_0 + s\mathbf{h})|^2}\ .$$

Mittelwertsatz

Beispiele

Quadratische Approximation

Vorüberlegung

Quadratische Approximation

Buch Kap. 5.11

Vorüberlegung

Quadratische Approximation

Satz 5.8: Quadratische Approximation

Das TAYLOR-Polynom zweiten Grades einer Funktion f an der Stelle $\mathbf{x}_0$ kann man in der Form

$$T_2(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}_0) + \operatorname{grad} f(\mathbf{x}_0) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) + \frac{1}{2}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)^T H_f(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)$$

darstellen, wobei H_f die HESSE$-$Matrix der Funktion f bezeichnet.

Quadratische Approximation

Buch Kap. 5.11

Beispiele

Beispiele

Extrema mit und ohne Nebenbedingungen

LA Wiederholung

(Semi-)definite Matrizen

- Eine Matrix $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ heißt symmetrisch, wenn $P = P^\top$.
- Eine symmetrische Matrix $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ heißt positiv definit, wenn $x^\top P x > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.
- Eine symmetrische Matrix $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ heißt positiv semidefinit, wenn $x^\top P x \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$.
- Eine symmetrische Matrix $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ heißt negativ definit, wenn $-P$ positiv definit ist.
- Eine symmetrische Matrix $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ heißt negativ semidefinit, wenn $-P$ positiv semidefinit ist.
- Eine symmetrische Matrix $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ heißt indefinit, wenn P weder positiv noch negativ semidefinit ist.

LA Wiederholung

Buch Kap. 5.13

Charakterisierung positiv definiter Matrizen

Gegeben sei eine symmetrische Matrix $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

- P ist positiv definit.
- Alle Eigenwerte von P sind positiv.
- Alle Hauptabschnittsdeterminanten $\det(P_k)$ sind positiv.
- P ist positiv semidefinit und $\ker P \neq \{0\}$.

LA Wiederholung

Buch Kap. 5.13

Charakterisierung positiv semidefiniter Matrizen

Gegeben sei eine symmetrische Matrix $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

- P ist positiv semidefinit.
- Alle Eigenwerte von P sind nichtnegativ.
- Alle Hauptabschnittsdeterminanten $\det(P_k)$ sind nichtnegativ.

LA Wiederholung

Buch Kap. 5.13

Charakterisierung negativ definiter Matrizen

Gegeben sei eine symmetrische Matrix $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

- P ist negativ definit.
- Alle Eigenwerte von P sind negativ.
- Die Hauptabschnittsdeterminanten $\det(P_k)$ sind abwechselnd negativ und positiv.

LA Wiederholung

Buch Kap. 5.13

Charakterisierung negativ semidefiniter Matrizen

Gegeben sei eine symmetrische Matrix $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

- P ist negativ semidefinit.
- Alle Eigenwerte von P sind nichtpositiv
- Die Hauptabschnittsdeterminanten $\det(P_k)$ abwechselnd nichtpositiv und nichtnegativ.

LA Wiederholung

Buch Kap. 5.13

Charakterisierung indefiniter Matrizen

Gegeben sei eine symmetrische Matrix $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

- P ist indefinit.
- P hat mindestens einen positiven Eigenwert und mindestens einen positiven Eigenwert.

Extremalstellen

Buch Kap. 5.13

Satz 5.11: Extremalstellen

Ist $\mathbf{x}_0 \in \mathring{D}$ lokale Extremalstelle einer partiell differenzierbaren Funktion $f : D \to \mathbb{R},\ D \subset \mathbb{R}^n$, so gilt

$$f'(\mathbf{x}_0) = \mathbf{0},$$

d.h. sämtliche partiellen Ableitungen von f verschwinden. (mit $\mathring{D}$ werden die inneren Punkte von D bezeichnet).
Ist f zweimal stetig partiell differenzierbar, so ist $H_f(x_0)$ negativ semidefinit, falls x_0 lokale Maximalstelle, positiv semidefinit, falls x_0 lokale Minimalstelle.

Extremalstellen

Buch Kap. 5.13

Definition 5.33: Lokale Extremalstellen

Es sei $f : D \to \mathbb{R},\ D \subset \mathbb{R}^n$ gegeben. Ist $\mathbf{x}_0 \in D$ ein Punkt, zu dem es eine Umgebung U mit

$$f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{x}_0) \qquad \text{für alle} \quad \mathbf{x} \in U \cap D,\ \mathbf{x} \neq \mathbf{x}_0,$$

gibt, so sagt man: f besitzt in $\mathbf{x}_0$ ein lokales oder relatives Maximum. Der Punkt $\mathbf{x}_0$ selbst heißt eine lokale Maximalstelle von f. Steht "$<$" statt "$\leq$", wird $\mathbf{x}_0$ als **echte** lokale Maximalstelle von f bezeichnet.

Extremalstellen

Buch Kap. 5.13

Satz 5.12: hinreichende Extremalbedingungen

Ist $f : D \to \mathbb{R},\ D \subset \mathbb{R}^n$ zweimal stetig partiell differenzierbar, so folgt:
Ein Punkt $\mathbf{x}_0 \in \mathring{D}$ mit $f'(\mathbf{x}_0) = \mathbf{0}$ ist

- eine echte lokale Maximalstelle, falls $H_f(\mathbf{x}_0)$ negativ definit,
- eine echte lokale Minimalstelle, falls $H_f(\mathbf{x}_0)$ positiv definit,
- keine lokale Extremalstelle, falls $H_f(\mathbf{x}_0)$ indefinit,

Extremalstellen

Buch Kap. 5.13

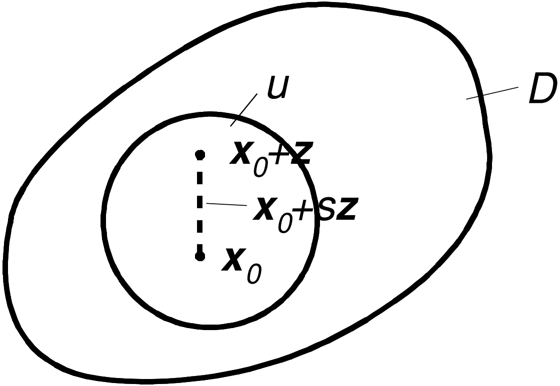


Abbildung 5.21: Zum Beweis von Satz 5.12

Satz 5.13: hinreichende Extremalbedingungen

Ist $f : D \to \mathbb{R},\ D \subset \mathbb{R}^n$ zweimal stetig partiell differenzierbar, so folgt:
Ein Punkt $\mathbf{x}_0 \in \mathring{D}$ mit $f'(\mathbf{x}_0) = \mathbf{0}$ ist eine

a) echte lokale Maximalstelle, falls die Eigenwerte der HESSE−Matrix $H_f(\mathbf{x}_0)$ alle negativ sind,

b) echte lokale Minimalstelle, falls die Eigenwerte der HESSE−Matrix $H_f(\mathbf{x}_0)$ alle positiv sind.

Extremalstellen

Buch Kap. 5.13

Beispiele

Extremalstellen

Buch Kap. 5.13

Beispiele

Extremalstellen

Beispiele

Extremalstellen

Buch Kap. 5.13

Beispiele

Extremalstellen

Satz 5.14: hinreichende Extremalbedingungen in $\mathbb{R}^2$

Ist die reellwertige Funktion $f : D \to \mathbb{R},\ D \subset \mathbb{R}^2$, zweimal stetig partiell differenzierbar auf $D \subset \mathbb{R}^2$. Dann gilt:
Ein Punkt $\mathbf{x}_0 = \binom{x_0}{y_0} \in \mathring{D}$ mit

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$$

und

$$f_{xx} f_{yy} - f_{xy}^2 > 0 \quad \text{in} \quad \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

ist eine

a) echte lokale Maximalstelle, falls $f_{xx}(x_0, y_0) < 0$ gilt,

b) echte lokale Minimalstelle, falls $f_{xx}(x_0, y_0) > 0$ gilt.

Extremalstellen

Buch Kap. 5.13

Beispiele

Extremalstellen

Buch Kap. 5.13

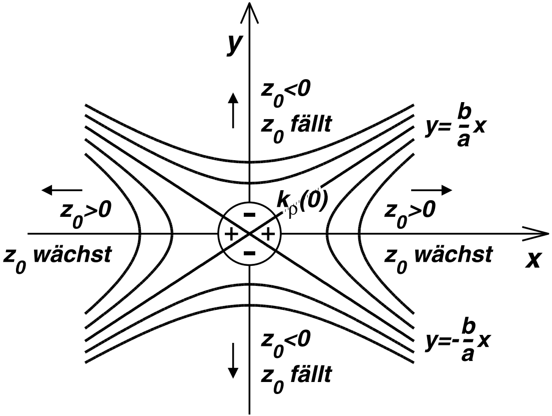


Abbildung 5.22: Sattelpunkt $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ der Fläche $z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$

Satz über implizite Funktionen

Buch Kap. 5.12

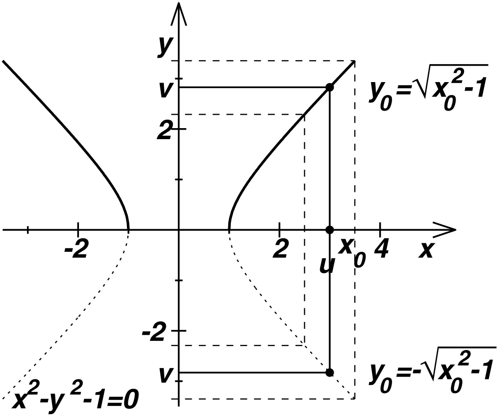


Abbildung 5.20: Zur Auflösbarkeit der Gleichung $f(x,y) = x^2 - y^2 - 1 = 0$ nach y

Satz über implizite Funktionen

Buch Kap. 5.12

Satz 5.10: Satz über implizite Funktionen

Sei $f : U_1 \times U_2 \to \mathbb{R}^m$ stetig diffbar, wobei $U_1 \subset \mathbb{R}^k$ und $U_2 \subset \mathbb{R}^m$ offene Mengen bezeichnen. Es gelte $f(x_0, y_0) = 0$ und $D_y f(x_0, y_0)$ sei invertierbar.

Dann gibt es offene Mengen $V_1(x_0) \subset U_1$, $V_2(y_0) \subset U_2$ und eine stetige Funktion $g : V_1 \to V_2$ mit

$$f(x, g(x)) = 0 \text{ für alle } x \in V_1.$$

Ferner ist g stetig diffbar mit

$$Dg(x) = -D_y f(x, g(x))^{-1} D_x f(x, g(x)).$$

Beachte: Ist $(x, y) \in V_1 \times V_2$ mit $f(x, y) = 0$, so folgt schon $y = g(x)$.

Satz über implizite Funktionen

Beispiel

Extrema mit Nebenbedingungen

Buch Kap. 5.14

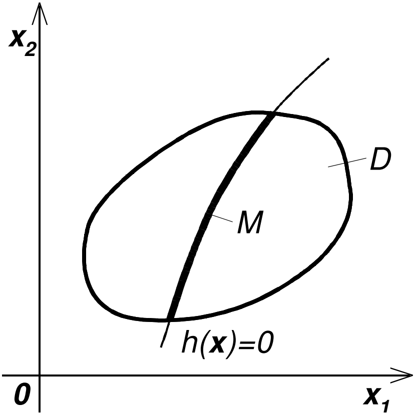


Abbildung 5.23: Die Menge $M = \{\mathbf{x} \in D \,|\, \mathbf{h}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}\}$ für $n = 2$ Raumdimensionen mit einer Nebenbedingung $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, d.h., $m = 1$.

Extrema mit Nebenbedingungen und LAGRANGE-Multiplikatoren

Buch Kap. 5.14

Satz 5.15: LAGRANGE-Multiplikatoren

Die Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ und die Abbildung $\mathbf{h} : D \to \mathbb{R}^m$ seien stetig partiell differenzierbar auf einer offenen Menge $D \subset \mathbb{R}^n$, $n > m$, wobei die JACOBI-Matrix $\mathbf{h}'(\mathbf{x})$ für jedes $\mathbf{x} \in D$ den Rang m habe. Dann gilt: Ist $\mathbf{x}_0 \in D$ eine lokale Extremalstelle von f unter der Nebenbedingung $\mathbf{h}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$, so existiert eine $(1 \times m)$-Matrix (Zeilenvektor) $\mathbf{L} = (\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m)$ mit

$$f'(\mathbf{x}_0) + \mathbf{L}\,\mathbf{h}'(\mathbf{x}_0) = \mathbf{0}\ .$$

Die reellen Zahlen $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m$ heißen LAGRANGE-Multiplikatoren.

Extrema mit Nebenbedingungen und LAGRANGE-Multiplikatoren

Buch Kap. 5.14

Satz 5.16: LAGRANGE-Multiplikatoren mit einer Nebenbedingung

Durch $f : D \to \mathbb{R}$ und $g : D \to \mathbb{R}$ werden zwei stetig partiell differenzierbare Funktionen auf einer offenen Menge $D \subset \mathbb{R}^n$ beschrieben. Dabei sei $\operatorname{grad} g(\mathbf{x}) \neq \mathbf{0}$ für alle $\mathbf{x} \in D$. Ist $\mathbf{x}_0 \in D$ eine lokale Extremalstelle von f unter der Nebenbedingung $g(\mathbf{x}) = 0$, so gilt

$$\operatorname{grad} f(\mathbf{x}_0) + \lambda \operatorname{grad} g(\mathbf{x}_0) = \mathbf{0}$$

mit einer reellen Zahl λ (LAGRANGE–Multiplikator).

Extrema mit Nebenbedingungen

Buch Kap. 5.14

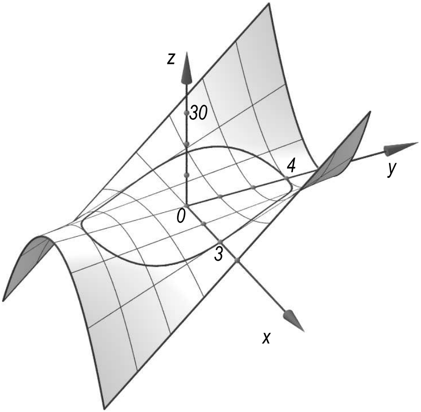
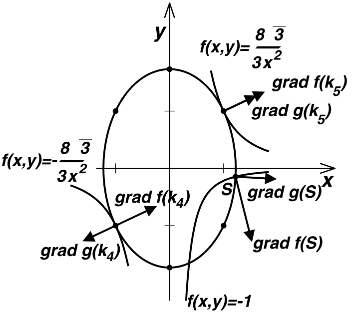


Abbildung 5.24: Graph der Funktion $f(x, y) = x^2 y$ mit Einschränkung des Graphen auf die Nebenbedingungsmenge

Extrema mit Nebenbedingungen

Buch Kap. 5.14



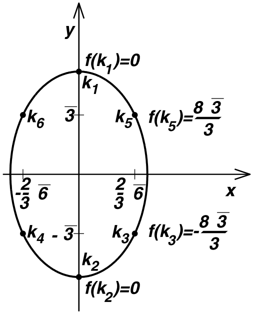


Abbildung 5.25: Gradienten von f und g und Extremwerte von $f(x, y)$ in den Punkten $K_1, \ldots, K_6$ auf dem Niveau $g(x, y) = 0$

Extrema mit Nebenbedingungen

Buch Kap. 5.14

Beispiel

Extrema mit Nebenbedingungen

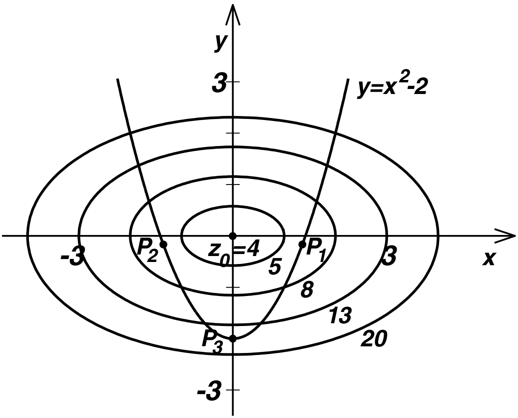


Abbildung 5.26: Extremwerte von $f(x, y) = x^2 + 3y^2 - 4$ auf dem Niveau $x^2 - y - 2 = 0$

Extrema mit Nebenbedingungen

Beispiel

Extrema mit Nebenbedingungen und LAGRANGE-Multiplikatoren

Buch Kap. 5.14

Beispiele

Extrema mit Nebenbedingungen und LAGRANGE-Multiplikatoren

Buch Kap. 5.14

Beispiele

Extrema mit Nebenbedingungen und LAGRANGE-Multiplikatoren

Buch Kap. 5.14

Beispiele

LAGRANGE-Funktion

Buch Kap. 5.14

LAGRANGE-Funktion

$f : D \to \mathbb{R}$ und $\mathbf{h} : D \to \mathbb{R}^m$ seien stetig partiell diffbar auf $D \subset \mathbb{R}^n$, $n > m$ mit $\operatorname{rang}(\mathbf{h}'(\mathbf{x})) = m$ für jedes $\mathbf{x} \in D$.
Die Funktion $L : D \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$,

$$L(x, \mu) := f(x) - \mu^T h(x)$$

heißt LAGRANGE-Funktion des Minimierungsproblems von f unter $h = 0$.
Ist x Extremalstelle von f unter $h = 0$ und λ der zugehörige LAGRANGE-Parameter, so gilt mit $\mu = -\lambda$

$$\operatorname{grad} L(x, \mu) = 0.$$

LAGRANGE-Funktion, hinreichende Optimalitätsbedingungen

Buch Kap. 5.14

LAGRANGE-Funktion

$f : D \to \mathbb{R}$ und $\mathbf{h} : D \to \mathbb{R}^m$ seien zweimal stetig partiell diffbar auf $D \subset \mathbb{R}^n$, $n > m$ mit $\operatorname{rang}(\mathbf{h}'(\mathbf{x})) = m$ für jedes $\mathbf{x} \in D$.
Es gelte

$$\operatorname{grad} L(x, \mu) = 0$$

und

$$w^T H_L(x, \mu) w > (<) 0 \text{ für alle } w \in \ker h'(x).$$

Dann ist x striktes lokales Minimum (Maximum) von f unter $h = 0$.

LAGRANGE-Funktion, hinreichende Optimalitätsbedingungen

Buch Kap. 5.14

Beispiele

LAGRANGE-Funktion, hinreichende Optimalitätsbedingungen

Buch Kap. 5.14

Beispiele

Das NEWTON-Verfahren

NEWTON-Verfahren für Gleichungssysteme

Buch Kap. 5.16

Motivation

Newton-Verfahren für Gleichungssysteme

Newton-Verfahren für Gleichungssysteme

Betrachte zu $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ das nichtlineare Gleichungssystem

$$f(x) = 0.$$

Das numerische Lösungsverfahren der Wahl für solche Gleichungen ist das Newton Verfahren

1) Wähle Startwert $x^0 \in \mathring{D}$, setze $k = 0$.
2) Ist $f(x^k) = 0$, STOP (mit $x = x^k$ gilt $f(x) = 0$).
3) Berechne x^{k+1} aus x^k gemäß

$$f'(x^k)\delta x = -f(x^k), \quad x^{k+1} = x^k + \delta x$$

4) k = k+1, gehe zu 2).

Auf dem Rechner: $f(x^k) = 0$ ist zu ersetzen durch ein geeignetes Abbruchkriterium.

NEWTON-Verfahren für Gleichungssysteme Buch Kap. 5.16

Satz 5.18: NEWTON-Verfahren für Gleichungssysteme

$\mathbf{f}: D \to \mathbb{R}^n, \; D \subset \mathbb{R}^n$, sei stetig differenzierbar und besitze eine Nullstelle $\bar{\mathbf{x}} \in \mathring{D}$. Weiterhin sei $\mathbf{f}'(\bar{x})$ regulär. Es gibt eine Umgebung U von $\bar{\mathbf{x}}$, so dass die NEWTON-Folge $\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, \mathbf{x}^3, ..., \mathbf{x}^k, ...$ von einem beliebigen $\mathbf{x}^0 \in U$ ausgehend gegen die Nullstelle $\bar{\mathbf{x}}$ von f konvergiert. Die Konvergenz ist superlinear, d.h. es gilt

$$|\mathbf{x}^k - \bar{\mathbf{x}}| = \mathcal{O}(|\mathbf{x}^{k-1} - \bar{\mathbf{x}}|).$$

Ist zusätzlich f' Lipschitz stetig, so ist die Konvergenz quadratisch, d.h. es gibt eine Konstante $C > 0$, so dass für alle $k = 1, 2, 3, ...$

$$|\mathbf{x}^k - \bar{\mathbf{x}}| \leq C|\mathbf{x}^{k-1} - \bar{\mathbf{x}}|^2$$

gilt.

Operatoren der Vektoranalysis

Operatoren der Vektoranalysis

Definition 7.1-7.4: Operatoren der Vektoranalysis

Sei $\phi : D \to \mathbb{R},\; D \subset \mathbb{R}^n$ ein stetig partiell differenzierbares Skalarfeld, $v : D \to \mathbb{R}^n$ Vektorfeld.

- Gradient

$$\text{grad: } \phi \mapsto \text{grad } \phi = \begin{pmatrix} \frac{\partial \phi}{\partial x_1} \\ \frac{\partial \phi}{\partial x_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial \phi}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

- Divergenz

$$\text{div: } v \mapsto \text{div } \mathbf{v} := \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \ldots + \frac{\partial v_n}{\partial x_n}$$

- Laplace Operator

$$\phi \mapsto \Delta\, \phi := \text{div grad } \phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_2^2} + \ldots + \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_n^2}$$

- Rotation ($n = 3$)

$$v \mapsto \text{rot } \mathbf{v} := \begin{pmatrix} \frac{\partial v_3}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial v_1}{\partial x_3} - \frac{\partial v_3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \end{pmatrix}$$

Operatoren der Vektoranalysis

Buch Kap. 7.1

Der “Nabla-Operator”

Formal

$$\nabla = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

grad:
$$\nabla \phi = \begin{pmatrix} \frac{\partial \phi}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial \phi}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

div:
$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \ldots + \frac{\partial v_n}{\partial x_n}$$

Operatoren der Vektoranalysis

Buch Kap. 7.1

Der “Nabla-Operator”

Formal

$$\nabla = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

$$\Delta\,\phi = \nabla \cdot \nabla\phi = \frac{\partial^2\phi}{\partial x_1^2} + \ldots + \frac{\partial^2\phi}{\partial x_n^2}$$

Rotation (n=3)
$$\nabla \times v = \begin{pmatrix} \frac{\partial v_3}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial v_1}{\partial x_3} - \frac{\partial v_3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \end{pmatrix}$$

Operatoren der Vektoranalysis

Buch Kap. 7.1

Beispiele

Operatoren der Vektoranalysis

Buch Kap. 7.1

Beispiele

Beispiele

Operatoren der Vektoranalysis

Buch Kap. 7.1

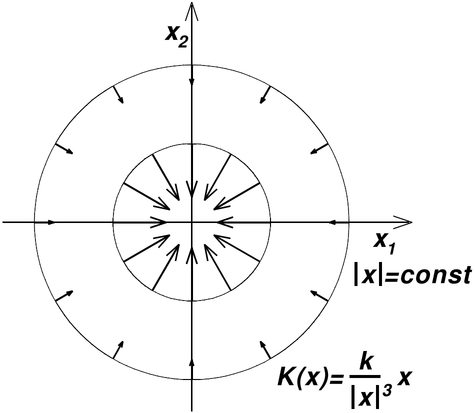


Abbildung 7.1: Zentralkraftfeld $\mathbf{K}(\mathbf{x}) := \frac{k}{|x|^3}x$ für $k < 0$ in der Ebene $x_3 = 0$.

Operatoren der Vektoranalysis

Buch Kap. 7.1

Beispiele

Operatoren der Vektoranalysis

Buch Kap. 7.1

Anwendung von grad, Δ auf Vektorfelder

Sei $\mathbf{v}$ ein stetig partiell differenzierbares Vektorfeld und $\mathbf{w}$ ein zweimal stetig partiell differenzierbares Vektorfeld.

$$\Delta\,\mathbf{w} := \begin{pmatrix} \Delta\, w_1 \\ \Delta\, w_2 \\ \\ \vdots \\ \Delta\, w_n \end{pmatrix}, \text{ und } (\mathbf{w}\cdot\nabla)\mathbf{v} := \begin{pmatrix} (\mathbf{w}\cdot\nabla)v_1 \\ (\mathbf{w}\cdot\nabla)v_2 \\ \vdots \\ (\mathbf{w}\cdot\nabla)v_n \end{pmatrix}.$$

also $\Delta\,\mathbf{w}$ als die komponentenweise Anwendung von Δ.

Potential und Potentialfeld

Buch Kap. 7.3

Defintion 7.6: (Potential, Potentialfeld, Gradientenfeld)

Sei **v** ein Vektorfeld.
Ein differenzierbares Skalarfeld ϕ, das die Gleichung

$$\operatorname{grad}\phi = \mathbf{v}$$

erfüllt, nennt man ein Potential oder eine Stammfunktion von **v**.
Falls es zu einem Vektorfeld **v** ein Potential ϕ gibt, nennt man **v** Potentialfeld oder Gradientenfeld (der Begriff konservatives Feld wird auch verwendet).

Potential und Potentialfeld

Buch Kap. 7.3

Potential, Potentialfeld, Gradientenfeld

Potential und Potentialfeld

Buch Kap. 7.3

Potential, Potentialfeld, Gradientenfeld

Potential und Potentialfeld

Buch Kap. 7.3

Potential, Potentialfeld, Gradientenfeld

Skalare Kurvenintegrale

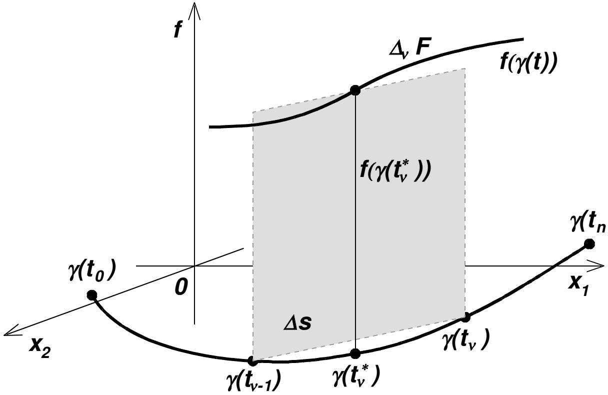


Abbildung 7.3: Zur Definition des skalaren Kurvenintegrals für $\gamma : [t_a, t_e] \to \mathbb{R}^2$

Skalare Kurvenintegrale

Buch Kap. 7.4

Definition 7.7: (Skalares Kurvenintegral einer Funktion)

Eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \supset \gamma([t_a, t_e]) \to \mathbb{R}$ sei auf allen Punkten einer Kurve $\gamma : [t_a, t_e] \to \mathbb{R}^n$ stetig. Dann heißt

$$\int_\gamma f\, ds := \int_{t_a}^{t_e} f(\gamma(t)) \|\dot{\gamma}(t)\|\, dt$$

skalares Kurvenintegral der Funktion f.

Skalare Kurvenintegrale

Buch Kap. 7.4

Schritte zur Berechnung des skalaren Kurvenintegrals einer Funktion

1) Falls nicht gegeben, Parametrisierung der Kurve $\gamma : [t_a, t_e] \to \mathbb{R}^n$
2) Berechnung der Funktionswerte $f(\gamma(t))$ der Belegungsfunktion
3) Berechnung von $\|\dot{\gamma}(t)\|$
4) Berechnung des Kurvenintegrals

$$\int_\gamma f\,ds = \int_{t_a}^{t_e} f(\gamma(t))\|\dot{\gamma}(t)\|\,dt.$$

Skalare Kurvenintegrale

Buch Kap. 7.4

Beispiel

Vektorielles Kurvenintegral

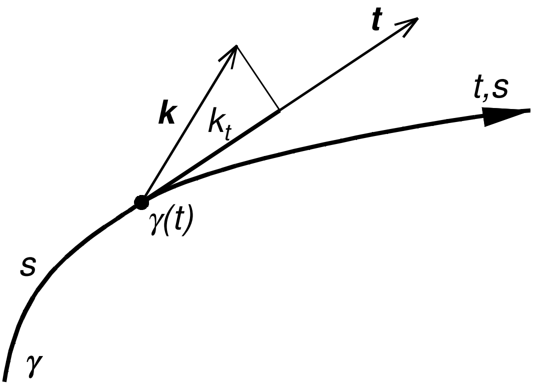


Abbildung 7.4: Kraftvektor **k** und Tangentialkomponente k_t, Kurventangentenvektor **t**. Der für die Arbeit entlang der Kurve relevante Kraftanteil wird durch k_t beschrieben.

Arbeitsintegral

Buch Kap. 7.5

Definition 7.8: (Arbeitsintegral)

Sei $\gamma : [t_a, t_e] \to \mathbb{R}^n$ ein Weg und $\mathbf{k} : \mathbb{R}^n \supset \gamma([t_a, t_e]) \to \mathbb{R}^n$ stetiges Vektorfeld. Dann heißt

$$\int_\gamma \mathbf{k} \cdot \mathbf{ds} := \int_{t_a}^{t_e} (\mathbf{k}(\gamma(t)) \cdot \dot{\gamma}(t))\, dt$$

Integral des Vektorfeldes (vektorielles Kurvenintegral bzw. Arbeitsintegral) entlang γ. Dabei bezeichnet $\mathbf{ds} = \dot{\gamma}(t)\, dt$ das vektorielle Bogenelement.

Besteht die Kurve γ aus den m Kurvenstücken $\gamma_1, ..., \gamma_m$, so setzen wir

$$\int_\gamma \mathbf{k} \cdot \mathbf{ds} := \sum_{i=1}^{m} \int_{\gamma_i} \mathbf{k} \cdot \mathbf{ds}.$$

Ist γ eine geschlossene Kurve, d.h. $\gamma(t_a) = \gamma(t_e)$, so schreiben wir

$$\oint_\gamma \mathbf{k} \cdot \mathbf{ds} \equiv \int_\gamma \mathbf{k} \cdot \mathbf{ds}.$$

Arbeitsintegral

Beispiel

Rechenregeln Arbeitsintegral

Buch Kap. 7.5

Satz 7.2: (Rechenregeln für Kurvenintegrale vektorieller Art)

Sei γ eine Kurve im $\mathbb{R}^n$, seien $\mathbf{v}, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 : \mathbb{R}^n \supset \gamma([t_a, t_e]) \to \mathbb{R}^n$ stetige Vektorfelder und $\alpha \in \mathbb{R}$. Dann gelten die Regeln

(i) $\int_\gamma (\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) \cdot \mathbf{ds} = \int_\gamma \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{ds} + \int_\gamma \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{ds}$

(ii) $\int_\gamma \alpha \mathbf{v} \cdot \mathbf{ds} = \alpha \int_\gamma \mathbf{v} \cdot \mathbf{ds}$

(iii) Ist γ^* die Kurve, die aus γ durch Umkehrung des Durchlaufsinns entsteht, d.h., $\gamma^*(t) := \gamma(t_a + t_e - t)$, $t \in [t_a, t_e]$, so folgt

$$\int_{\gamma^*} \mathbf{v} \cdot \mathbf{ds} = -\int_\gamma \mathbf{v} \cdot \mathbf{ds} \,.$$

Rechenregeln Arbeitsintegral

Buch Kap. 7.5

Berechnung des Arbeitsintegrals

1) Falls nicht gegeben, Parametrisierung der Kurve $\gamma : [t_a, t_e] \to \mathbb{R}^n$
2) Berechnung der Werte $\mathbf{k}(\gamma(t))$ in den Kurvenpunkten
3) Berechnung des Tangentenvektors $\dot{\gamma}(t)$
4) Berechnung des Kurvenintegrals

$$\int_\gamma \mathbf{k} \cdot \mathbf{ds} = \int_{t_a}^{t_e} (\mathbf{k}(\gamma(t)) \cdot \dot{\gamma}(t))\, dt\ .$$

Arbeitsintegral

Buch Kap. 7.5

Beispiel

Stammfunktion eines Gradientenfeldes

Buch Kap. 7.6

Satz 7.3: (erster Hauptsatz für Potentialfelder)

Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet und $\mathbf{v} : D \to \mathbb{R}^n$ ein Potentialfeld mit der Stammfunktion f.
Dann gilt für jede in D verlaufende Kurve $\gamma : [t_a, t_e] \to \mathbb{R}^n$

$$\int_\gamma \mathbf{v} \cdot \mathbf{ds} = f(\gamma(t_e)) - f(\gamma(t_a))$$

Stammfunktion eines Gradientenfeldes

Buch Kap. 7.6

Satz 7.4: (Kurvenintegrale und Potentialfelder)

Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet, $\gamma : [t_a, t_e] \to D$ eine Kurve in D und $\mathbf{v} : D \to \mathbb{R}^n$ ein stetiges Vektorfeld. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

1) Für alle Kurven γ hängt das Kurvenintegral $\int_\gamma \mathbf{v} \cdot \mathbf{ds}$ nur vom Anfangs- und Endpunkt der Kurve ab. Diese Eigenschaft heißt **Wegunabhängigkeit** des Kurvenintegrals.
2) Für alle geschlossenen Kurven γ, d.h. $\gamma(t_a) = \gamma(t_e)$, gilt $\oint_\gamma \mathbf{v} \cdot \mathbf{ds} = 0$.
3) $\mathbf{v}$ ist ein Potentialfeld.

Stammfunktion eines Gradientenfeldes

Buch Kap. 7.6

Beispiel

Doppelpunktfreie Kurven

Buch Kap. 7.6

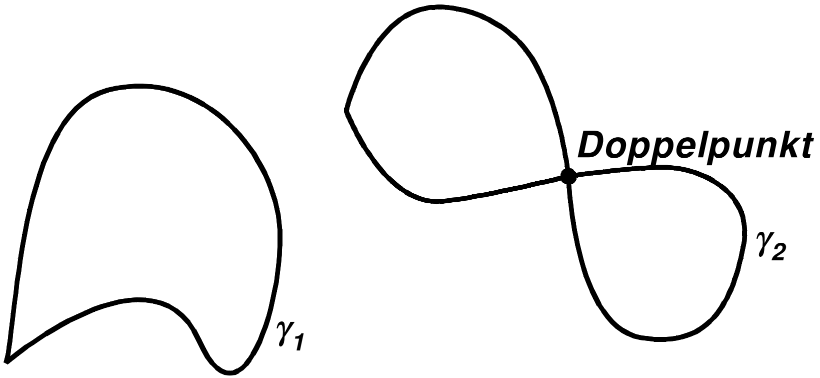


Abbildung 7.5: Doppelpunktfreie Kurve γ_1 und Kurve mit Doppelpunkt γ_2

Doppelpunktfreie Kurven

Buch Kap. 7.6

Definition 7.9: (Doppelpunktfreiheit)

Eine Kurve $\gamma : [t_a, t_e] \to \mathbb{R}^n$ heißt doppelpunktfrei, falls

$$\gamma(t_1) \neq \gamma(t_2) \quad \text{für} \quad t_1 \neq t_2,\ t_1, t_2 \in (t_a, t_e)$$

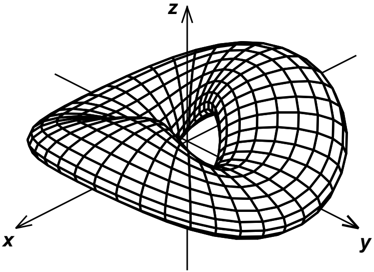
und $\gamma(t_a) \neq \gamma(t)$ für $t \in (t_a, t_e)$ gilt.

einfach zusammenhängend

Buch Kap. 7.6

Definition 7.10: (einfach zusammenhängendes Gebiet)

Ein Gebiet $D \subset \mathbb{R}^n$ heißt einfach zusammenhängend oder kontrahierbar, falls jede geschlossene, doppelpunktfreie Kurve in D stetig auf einen Punkt $\mathbf{x} \in D$ zusammengezogen werden kann.



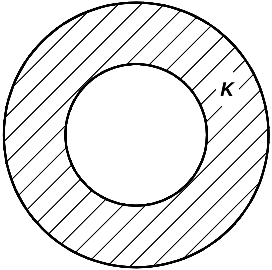


Abbildung 7.6 (links): Torus als nicht einfach zusammenhängendes Gebiet im $\mathbb{R}^3$, Abbildung 7.7 (rechts): Kreisring als nicht einfach zusammenhängendes Gebiet im $\mathbb{R}^2$.

Existenz eines Potentials

Satz 7.5: (Kriterium für die Existenz eines Potentials, zweiter Hauptsatz für Potentialfelder)

Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet und $\mathbf{v} : D \to \mathbb{R}^n$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld.
$\mathbf{v}$ ist genau dann ein Potentialfeld, wenn die JACOBI–Matrix $J_{\mathbf{v}}(\mathbf{x})$ für alle $\mathbf{x} \in D$ symmetrisch ist, also

$$J_{\mathbf{v}}(\mathbf{x}) = J_{\mathbf{v}}(\mathbf{x})^T$$

gilt.
Die Forderung nach der Symmetrie der JACOBI–Matrix nennt man auch Integrabilitätsbedingung.
Für den Fall $n = 3$ ist die Symmetrie der JACOBI–Matrix gleichbedeutend mit der Gleichung

$$\operatorname{rot} \mathbf{v}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}.$$

einfach zusammenhängend

Buch Kap. 7.6

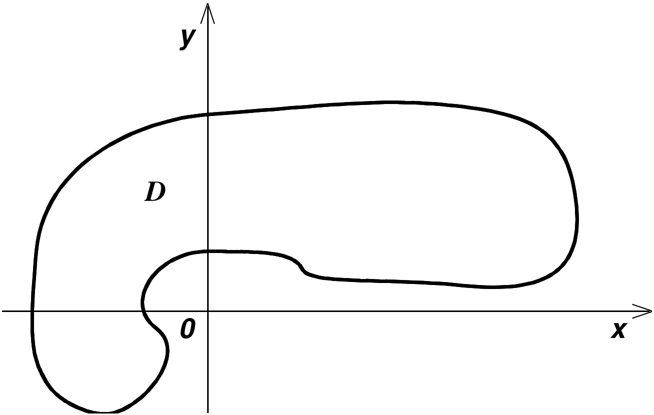


Abbildung 7.8: Einfach zusammenhängendes Gebiet D mit $(0,0) \notin D$.

Kurvenintegral Methode

Buch Kap. 7.6

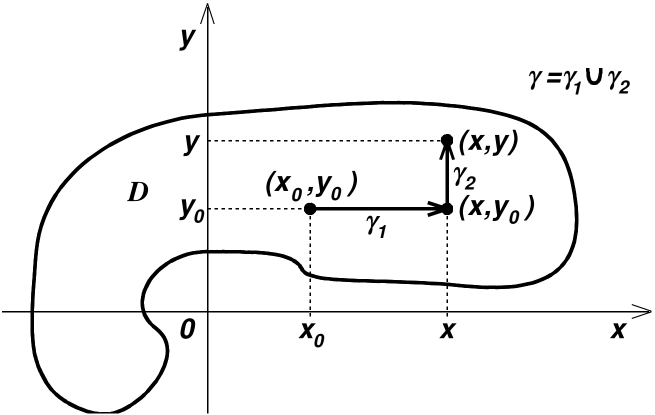


Abbildung 7.9: Zur Methode mit dem Kurvenintegral.

Vektorpotentiale

Buch Kap. 7.8

Definition 7.11: (Vektorpotential)

Sei $\mathbf{v} : D \to \mathbb{R}^3,\ D \subset \mathbb{R}^3$, gegeben. Existiert ein differenzierbares Vektorfeld $\mathbf{w} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit

$$\mathbf{v} = \operatorname{rot} \mathbf{w} \ ,$$

so heißt $\mathbf{w}$ Vektorpotential von $\mathbf{v}$.

Vektorpotentiale

Buch Kap. 7.8

Satz 7.6: (Kriterium für die Existenz eines Vektorpotentials)

Sei $\mathbf{v} : D \to \mathbb{R}^3,\ D \subset \mathbb{R}^3$, ein differenzierbares Vektorfeld. Ist D eine offene konvexe Menge, dann ist die Bedingung

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$$

notwendig und hinreichend für die Existenz eines Vektorpotentials $\mathbf{w}$ mit $\mathbf{v} = \operatorname{rot} \mathbf{w}$.

Statt der Forderung der Konvexität von D reicht hier auch die schwächere Forderung, dass D einfach zusammenhängend ist.

Vektorpotentiale

Beispiel

Vektorpotentiale

Buch Kap. 7.8

Beispiel

Integration im Mehrdimensionalen

Flächeninhalt ebener Bereiche

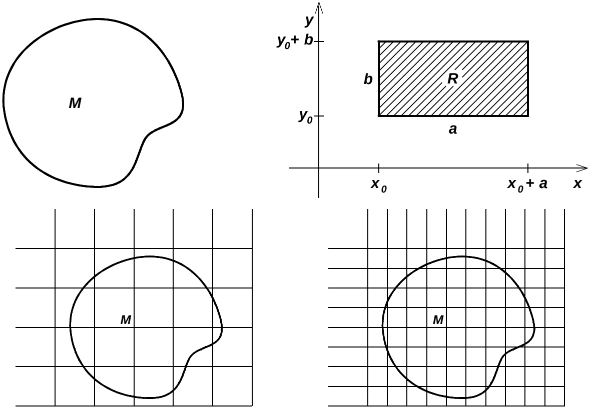


Abbildung 8.1-8.4: Punktmenge $M \subset \mathbb{R}^2$ (ol), Rechteck (or), Gitter mit Maschenweite h (ul), mit Maschenweite $h/2$ (ur).

Volumen

Definition 8.1: JORDAN-messbar

Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ und G_h Gitter über M mit Maschenweite $h > 0$. $s_h(M)$ bezeichne Fläche aller vollständig in M enthaltenen Maschen, $S_h(M)$ die Fläche aller Maschen, die wenigstens einen Punkt aus M enthalten. Mit

$$F_i(M) := \lim_{h\to 0} s_h(M) \text{ und } F_o(M) := \lim_{h\to 0} S_h(M)$$

heißt
die Menge M JORDAN-messbar, wenn

$$F_i(M) = F_o(M)$$

gilt.
In diesem Fall wird das Volumen der Menge M durch

$$F(M) := F_i(M) = F_o(M)$$

reguläre Bereiche

Buch Kap. 8.1

Definition 8.2: regulärer Bereich

Eine beschränkte Teilmenge $B \subset \mathbb{R}^n$ heißt regulärer Bereich, falls

a) B abgeschlossen ist,

b) das Innere von B, also $B \setminus \partial B$, ein Gebiet ist und

c) der Rand ∂B von B aus endlich vielen regulären $n-1$-dimensionalen Hyperflächen besteht (die etwa als Graphen von glatten Funktionen darstellbar sind).

Durchmesser einer Menge

Buch Kap. 8.2

Definition 8.3: Durchmesser

Unter dem Durchmesser einer Punktmenge C wollen wir

$$\operatorname{diam}(C) := \sup\{|\mathbf{x} - \mathbf{y}| \mid \mathbf{x}, \mathbf{y} \in C\}$$

verstehen.

Zerlegungen

Definition 8.4: Zerlegung

Unter einer Zerlegung Z von B verstehen wir eine Familie

$$\{B_j | j = 1, ..., n\}$$

von regulären Teilbereichen mit den Eigenschaften

a) $\cup_{j=1}^{n} B_j = B$,
b) für $i \neq j$ ist $B_i \cap B_j$ eine Nullmenge,

wobei wir unter einer Familie eine Menge von Mengen verstehen wollen.
Die Feinheit $\delta(Z)$ einer Zerlegung Z ist durch

$$\delta(Z) := \max\{\mathrm{diam}(B_j) | j = 1, ..., n\}$$

definiert. Eine Folge (Z_k) von Zerlegungen heißt zulässig, falls

$$\lim \ \delta(Z_k) = 0$$

Zerlegungen

Buch Kap. 8.2

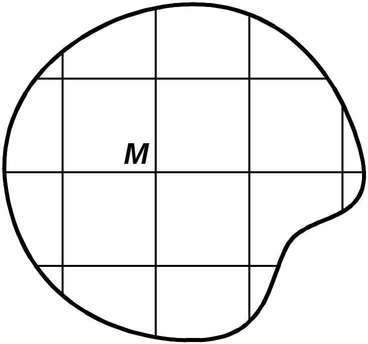


Abbildung 8.5: Zerlegung von $M \subset \mathbb{R}^2$

RIEMANN'sche Zwischensummen

Buch Kap. 8.2

Definition 8.5: RIEMANN'sche Zwischensumme

Sei $f : B \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion. Ist $Z = \{B_j | j = 1, ..., n\}$ eine Zerlegung von B und sind $\mathbf{x}_j \in B_j$ beliebige Punkte (sogenannte Zwischenpunkte), so heißt der Ausdruck

$$S(f, Z) = \sum_{j=1}^{n} f(\mathbf{x}_j) F(B_j)$$

RIEMANNsche Zwischensumme der Funktion f bezüglich der Zerlegung Z und der Zwischenpunkte $\mathbf{x}_j$.

RIEMANNsches Flächenintegral

Buch Kap. 8.2

Satz 8.2

Ist f beschränkt und in B (möglicherweise mit Ausnahme einer Nullmenge) stetig, so

- konvergiert die Folge der RIEMANNschen Zwischensummen $(S(f, Z_k))$ für jede Folge zulässiger Zerlegungen (Z_k), und
- der Grenzwert

$$I := \lim_{k\to\infty} S(f, Z_k)$$

ist unabhängig von der speziellen Wahl der zulässigen Folge von Zerlegungen (Z_k) und von der Wahl der Zwischenpunkte.

RIEMANNsches Flächenintegral

Buch Kap. 8.2

Definition 8.6: RIEMANNsches Flächenintegral

Unter den Voraussetzungen an f aus Satz 8.2 nennt man I das RIEMANNsche Flächenintegral der Funktion f über den Bereich B, und man verwendet die Schreibweisen

$$\int_B f\, dF = \int_B f(x)\, dF = \int_B f(x)\, dx = \int_B f(x)\, dx_1 \ldots dx_n := I,$$

wobei $x = (x_1, \ldots, x_n)$.

Volumen

Buch Kap. 8.2

Satz 8.3

a) Für jeden Bereich $B \subset \mathbb{R}^n$ gilt offensichtlich

$$\int_B 1\, dF = F(B) \text{ (Volumen von } B\text{)}.$$

b) Ist $f \geq 0$ und stetig, so beschreibt

$$K = \{(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n)^t \in B;\ 0 \leq x_n \leq f(x_1, \ldots, x_{n-1})\}$$

eine Teilmenge des $\mathbb{R}^n$. Das Integral $\int_B f\, dF$ definiert dann das Volumen $V(K)$ dieser Teilmenge.

Eigenschaften des RIEMANN-Integrals

Buch Kap. 8.2

Eigenschaften des RIEMANN-Integrals

(i) $\int_B (f+g)\,dF = \int_B f\,dF + \int_B g\,dF$ (Additivität des Integrals), $\int_B \alpha f\,dF = \alpha \int_B f\,dF$ (Homogenität des Integrals),

(ii) Aus $f \leq g$ folgt $\int_B f\,dF \leq \int_B g\,dF$ (Monotonie des Integrals)

(iv) Wenn B_1 und B_2 zwei Bereiche mit $B_1 \cup B_2 = B$ und $F(B_1 \cap B_2) = 0$ sind, so gilt

$$\int_{B_1} f\,dF + \int_{B_2} f\,dF = \int_B f\,dF \text{ (Bereichsadditivität}$$

(v) Wenn B ein regulärer Bereich ist und $f : B \to \mathbb{R}$ stetig ist, so gibt es einen Punkt $\mathbf{x}^* \in B$ mit

$$\int_B f\,dF = f(\mathbf{x}^*)F(B) \text{ (Mittelwertsatz der Integralrechnung).}$$

Integration über Produktintervalle

Satz (vergl. Satz 8.4, 8.16)

Seien $a_i < b_i$ $(i = 1, \ldots, n)$ Zahlen. Dann heißt

$$I := \prod_{i=1}^{n} [a_i, b_i] \text{ Produktintervall.}$$

Seien $I_x \subset \mathbb{R}^p$ und $I_y \subset \mathbb{R}^q$ Produktintervalle und $I := I_x \times I_y$. Ist f auf I R-integrierbar und existiert

$$g(y) := \int_{I_x} f(x, y) dx \text{ für jedes } y \in I_y,$$

so ist g auf I_y R-integrierbar und es gilt

$$\int_I f(x, y) d(x, y) = \int_{I_y} \left(\underbrace{\int_{I_x} f(x, y) dx} \right) dy.$$

Beispiel

Beispiel

Beispiel

Integration über Produktintervalle

Buch Kap. 8.3

Beispiel

Transformationsformel

Buch Kap. 8.5

vergl. Satz 8.9: Transformationsformel

Sei $g : G \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ stetig diffbar, injektiv und es gelte $\det Dg(x) > 0$ oder $\det Dg(x) < 0$ für alle $x \in G$. $T \subset G$ sei kompakt, Jordan-meßbar und $f : g(T) \to \mathbb{R}$ sei stetig.
Dann ist $g(T)$ Jordan-meßbar, f auf $g(T)$ R-integrierbar und es gilt

$$\int_{g(T)} f(x)dx = \int_T f(g(t))|\det Dg(t)|dt.$$

Transformationsformel für Volumenintegrale

Buch Kap. 8.5

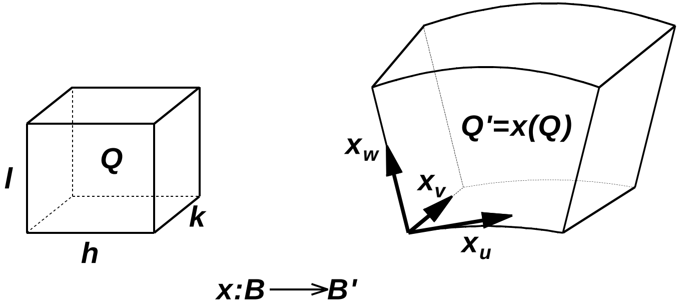


Abbildung 8.35: Koordinatentransformation in 3d

Polarkoordinaten

Buch Kap. 8.5

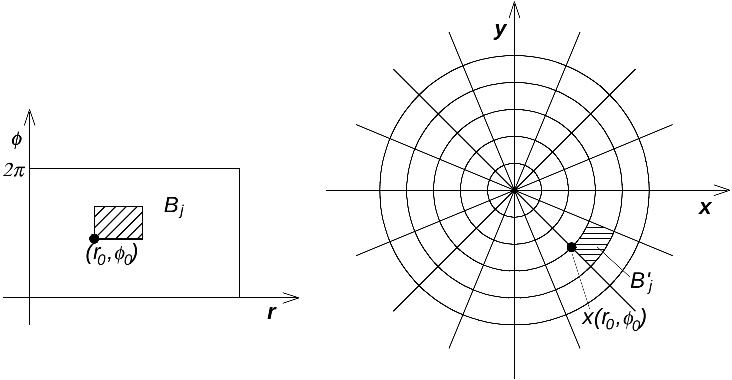


Abbildung 8.18: Polarkoordinaten

Polarkoordinaten

Buch Kap. 8.5

Polarkoordinaten

Buch Kap. 8.5

Polarkoordinaten

Buch Kap. 8.5

Polarkoordinaten

Buch Kap. 8.5

Kreiskoordinaten

Buch Kap. 8.5

Kreiskoordinaten

Buch Kap. 8.5

Zylinderkoordinaten

Buch Kap. 8.5

Zylinderkoordinaten

Buch Kap. 8.5

Zylinderkoordinaten

Buch Kap. 8.5

Oberflächen und Oberflächenintegrale

Integration über Oberflächen

Buch Kap. 8.6

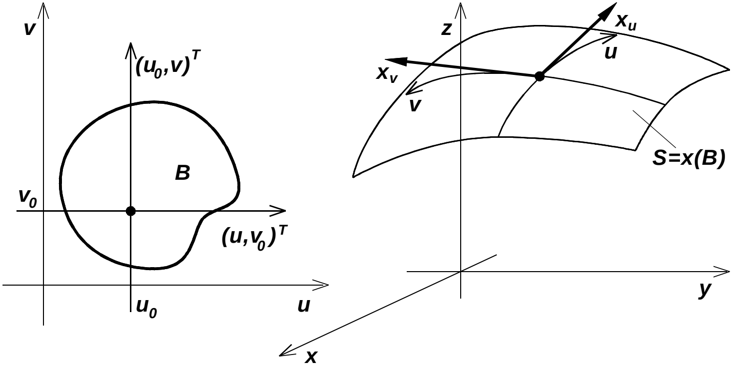


Abbildung 8.20: Reguläres Flächenstück $S = \mathbf{x}(B)$

Parametrisierung von Flächenstücken

Parametrisierung

Es seien $D \subset \mathbb{R}^2$ ein Gebiet und $B \subset D$ ein regulärer Bereich. Sei $\mathbf{x} : D \to \mathbb{R}^3$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld. Die Einschränkung von $\mathbf{x}$ auf B wird Parametrisierung eines reguären Flächenstücks genannt, falls

1) $\mathbf{x}$ injektiv ist, und
2) für alle $(u, v)^T \in B$

$$\mathbf{x}_u(u, v) \times \mathbf{x}_v(u, v) \neq \mathbf{0} \text{ erfüllt ist.}$$

Die Punktmenge

$$S := \{\mathbf{x}(u, v) | (u, v)^T \in B\} =: \mathbf{x}(B)$$

ist dann das von der Parameterdarstellung $\mathbf{x}$ dargestellte Flächenstück und wird reguläres Flächenstück genannt.

stückweise reguläre Fläche

Buch Kap. 8.6

stückweise reguläre Fläche

Eine Teilmenge $S \subset \mathbb{R}^3$ heißt stückweise reguläre Fläche, wenn es endlich viele reguläre Flächenstücke $S_1, ..., S_p$ gibt, die höchstens endlich viele reguläre Kurvenstücke ihrer Ränder gemeinsam besitzen und für die

$$S = \cup_{j=1}^{p} S_j$$

gilt.

stückweise reguläre Fläche

Buch Kap. 8.6

Definition: Flächeninhalt eines Flächenstücks

Der Flächeninhalt $O(S)$ eines regulären Flächenstücks S, das durch die Parametrisierung $\mathbf{x} : B \to \mathbb{R}^3,\ S = \mathbf{x}(B)$ gegeben ist, wird durch

$$O(S) = \int_B |\mathbf{x}_u(u,v) \times \mathbf{x}_v(u,v)| dF$$

definiert.

stückweise reguläre Fläche

Buch Kap. 8.6

Flächeninhalt (Beispiel)

stückweise reguläre Fläche

Buch Kap. 8.6

Flächeninhalt (Beispiel)

Integration über Oberflächen

Buch Kap. 8.6

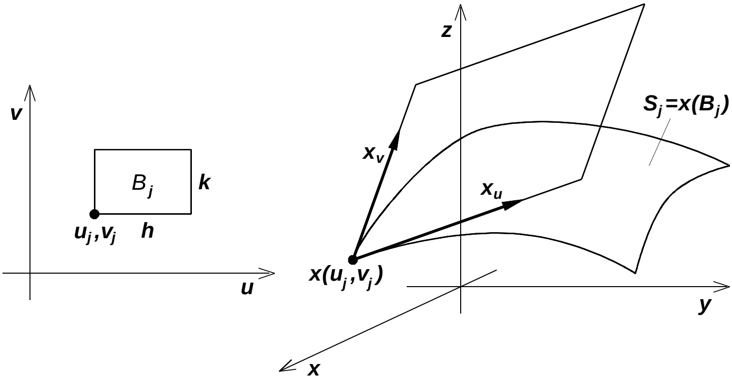


Abbildung 8.23:Übergang von B_j mittels $\mathbf{x}$ zu S_j

Integration über Oberflächen

Buch Kap. 8.6

Definition: Oberflächenintegral

Seien $D \subset \mathbb{R}^2$ ein Gebiet, $B \subset D$ ein regulärer Bereich und $S \subset \mathbb{R}^3$ ein reguläres Flächenstück mit der Parameterdarstellung $\mathbf{x} : B \to S,\ \mathbf{x}(B) = S$. Wenn $f : S \to \mathbb{R}$ eine bschränkte Funktion ist und das Riemann Integral

$$\int_B f(\mathbf{x}(u,v))|\mathbf{x}_u(u,v) \times \mathbf{x}_v(u,v)|\, dF$$

existiert, so heißt

$$\int_S f\, dO := \int_B f(\mathbf{x}(u,v))|\mathbf{x}_u(u,v) \times \mathbf{x}_v(u,v)|\, dF$$

Oberflächenintegral der Funktion f über das reguläre Flächenstück S.

Oberflächenintegral (Beispiel)

Integration über Oberflächen

Buch Kap. 8.6

Oberflächenintegral (Beispiel)

Stückweise Integration über Oberflächen

Buch Kap. 8.6

Stückweise Integration über Oberflächen

Ist $S = \cup_{j=1}^{k} S_j$ eine stückweise reguläre Fläche im $\mathbb{R}^3$, wobei die Schnittmengen $S_i \cap S_j$ für $i \neq j$ aus höchstens endlich vielen regulären Kurvenstücken bestehen, so definiert man für eine stetige Funktion $f : S \to \mathbb{R}$ das Oberflächenintegral $\int_S f\, dO$ durch

$$\int_S f\, dO = \sum_{j=1}^{k} \int_{S_j} f\, dO.$$

Ist $f : S \to \mathbb{R}$ stetig (bis auf eine Nullmenge), so existiert

$$\int_S f\, dO.$$

Berechnung des Oberflächenintegrals

Buch Kap. 8.6

Berechnung des Oberflächenintegrals

1) Falls nicht gegeben, Parametrisierung der Fläche S durch $\mathbf{x} : B \to \mathbb{R}^3$, B Bereich aus $\mathbb{R}^2$ mit $\mathbf{x}(B) = S$
2) Berechnung der Funktionswerte der Belegungsfunktion $f(\mathbf{x}(u, v))$
3) Berechnung des Oberflächenelements

$$dO = |\mathbf{x}_u(u, v) \times \mathbf{x}_v(u, v)| dudv$$

   auf der Basis der Tangentenvektoren $\mathbf{x}_u(u, v)$ und $\mathbf{x}_v(u, v)$
4) Berechnung des Oberflächenintegrals

$$\int_S f\, dO = \int_B f((\mathbf{x}(u, v))|\mathbf{x}_u(u, v) \times \mathbf{x}_v(u, v)| dudv$$

Eigenschaften des Oberflächenintegrals

Buch Kap. 8.6

Eigenschaften des Oberflächenintegrals

Seien f und g stetige Funktionen auf der regulären Fläche S und $\alpha \in \mathbb{R}$. Dann gilt

(i) $\int_S (f+g)\,dO = \int_S f\,dO + \int_S g\,dO$ (Additivität),

(ii) $\int_S \alpha f\,dO = \alpha \int_S f\,dO$ (Homogenität),

(iii) aus $f \leq g$ folgt $\int_S f\,dO \leq \int_S g\,dO$ (Monotonie),

(iv) (Bereichsadditivität) S_1 und S_2 Flächen mit $S_1 \cap S_2 =$ endlich viele reguläre Kurvenstücke. Dann

$$\int_{S_1} f\,dO + \int_{S_2} f\,dO = \int_{S_1 \cup S_2} f\,dO\,,$$

(v) (Mittelwertsatz) S stückweise reguläre Fläche, $f : S \to \mathbb{R}$ stetig. Dann gibt es $\mathbf{x}_0 \in S$ mit $\int_S f\,dO = f(\mathbf{x}_0)\,O(S)$.

Flüsse

Buch Kap. 8.6

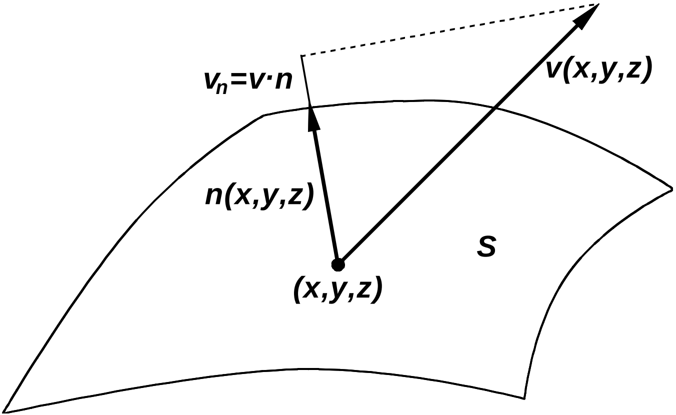


Abbildung 8.25: Normalenvektor und Normalkomponente eines Vektorfeldes auf einem Flächenelement

Fluss eines Vektorfelds durch Flächen

Buch Kap. 8.6

Definition 8.14: Oberflächenintegral von Vektorfeldern

Seien $S \subset \mathbb{R}^3$ ein reguläres Flächenstück mit der Parameterdarstellung $\mathbf{x}$ und $\mathbf{v} : S \to \mathbb{R}^3$ ein stetiges Vektorfeld, dann wird durch

$$\int_S \mathbf{v} \cdot \mathbf{dO} := \int_S \mathbf{v}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) \, dO$$

das Oberflächenintegral des Vektorfeldes $\mathbf{v}$ durch S bzw. der Fluss von $\mathbf{v}$ durch S definiert.

Fluss eines Vektorfelds durch Flächen

Buch Kap. 8.6

Oberflächenintegral von Vektorfeldern (Beispiel)

Fluss eines Vektorfelds durch Flächen

Buch Kap. 8.6

Oberflächenintegral von Vektorfeldern (Beispiel)

Berechnung des Flusses

Buch Kap. 8.6

Berechnung des Flusses

1) Parametrisierung der Fläche S durch $\mathbf{x} : B \to \mathbb{R}^3$, B Bereich aus $\mathbb{R}^2$ mit $\mathbf{x}(B) = S$
2) Berechnung der Werte des VF $\mathbf{v}(\mathbf{x}(u, v))$ auf S
3) Berechne vektorielles Oberflächenelement

$$\mathbf{dO} = (\mathbf{x}_u(u, v) \times \mathbf{x}_v(u, v))dudv$$

4) Berechnung des Flussintegrals

$$\int_S \mathbf{v} \cdot \mathbf{dO} = \int_B \mathbf{v}(\mathbf{x}(u, v)) \cdot (\mathbf{x}_u(u, v) \times \mathbf{x}_v(u, v))dudv$$

Zirkulation

Buch Kap. 8.6

Definition 8.15: Zirkulation

Es sei $\mathbf{v} : M \to \mathbb{R}^3$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld, $M \subset \mathbb{R}^3$, offen, und k eine geschlossene, reguläre, orientierte Kurve in M.
Das Kurvenintegral

$$Z = \oint_k \mathbf{v} \cdot \mathbf{dx}$$

nennt man die Zirkulation von $\mathbf{v}$ längs der Kurve k.
Zirkulation ist also das Arbeitsintegral über v entlang geschlossener Kurven.

Zirkulation

Buch Kap. 8.4

Satz 8.7: (Satz von GREEN)

Sei $D \subset \mathbb{R}^2$ ein Gebiet und $B \subset D$ ein Bereich, dessen Rand aus endlich vielen positiv orientierten Kurven besteht (d.h. Bereich liegt beim Durchlauf der Kurve auf der linken Seite), und $\mathbf{v} : D \to \mathbb{R}^2$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld. Dann gilt

$$\int_{\partial B} \mathbf{v} \cdot \mathbf{dx} = \int_B \underbrace{[\frac{\partial v_2(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial v_1(x,y)}{\partial y}]}_{=\text{rot } \mathbf{v}} \, dF \, .$$

Zirkulation

Beispiel (Satz von GREEN)

Zirkulation

Beispiel (Satz von GREEN)

Zirkulation

Definition 8.16: (Wirbelstärke)

Es sei $\mathbf{v} : M \to \mathbb{R}^3$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld, $M \subset \mathbb{R}^3$, offen, und $\mathbf{x}_0 \in M$. Der Grenzwert

$$W_{\mathbf{n}}(\mathbf{x}_0) := \lim_{|A| \to 0, \mathbf{x}_0 \in A} \frac{1}{F(A)} \oint_{\partial A} \mathbf{v} \cdot \mathbf{dx}$$

heißt die Wirbelstärke von $\mathbf{v}$ bezüglich der Einheitsrichtung $\mathbf{n}$ in $\mathbf{x}_0$.
Dabei werden mit $A \subset M$ ebene, einfach zusammenhängende und stückweise glatt berandete Flächenstücke bezeichnet, die die gleiche Einheitsnormale $\mathbf{n}$ haben. $|A| = \sup_{\mathbf{x},\mathbf{y} \in A}\{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|\}$.
Es gilt Satz 8.12 (Beweis mit Satz 8.7 von Green :

$$W_{\mathbf{n}}(\mathbf{x}_0) = \mathbf{n} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{v}(\mathbf{x}_0).$$

Man nennt $\operatorname{rot} \mathbf{v}$ das zu $\mathbf{v}$ gehörende Wirbelfeld.

Wirbelstärke und Zirkulation

Buch Kap. 8.6

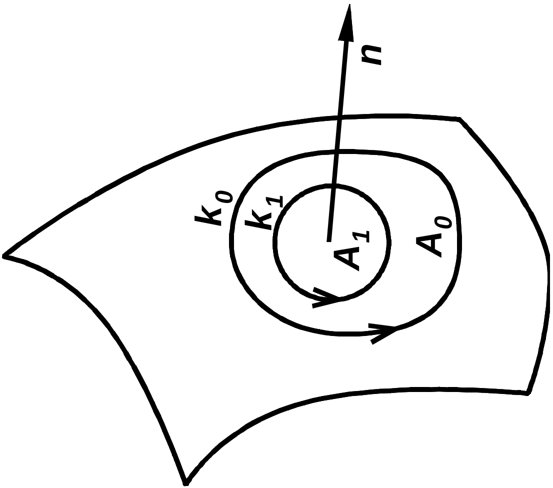


Abbildung 8.29: Von der Zirkulation zur Wirbelstärke

Zirkulation auf Flächen

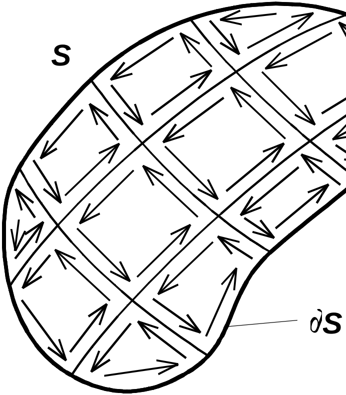


Abbildung 8.31: Zirkulation um S und Wirbelstärke auf S

Es gilt

$$\oint_{\partial S} v \cdot dx = \sum_{j=1}^{p} \oint_{\partial S_j} v \cdot dx$$

Satz von STOKES in $\mathbb{R}^3$

Buch Kap. 8.7

Satz 8.13: (Satz von STOKES in $\mathbb{R}^3$)

Es sei $\mathbf{v} : M \to \mathbb{R}^3$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld, $M \subset \mathbb{R}^3$, offen, und S ein reguläres Flächenstück in M, welches von einer regulären, orientierten Kurve ∂S berandet sei. Dann gilt

$$\oint_{\partial S} \mathbf{v} \cdot \mathbf{dx} = \int_S \operatorname{rot} \mathbf{v} \cdot \mathbf{dO} \equiv \int_S \operatorname{rot} \mathbf{v} \cdot n dO.$$

Dabei bildet n zusammen mit der Tangente und der Normalen an ∂S ein Rechtssystem (positiv orientiertes Dreibein).

Satz von STOKES in $\mathbb{R}^3$

Beispiel (Satz von STOKES in $\mathbb{R}^3$)

Beispiel (Satz von STOKES in $\mathbb{R}^3$)

Beispiel (Satz von STOKES in $\mathbb{R}^3$)

Illustration zum Satz von GAUSS

Buch Kap. 8.11

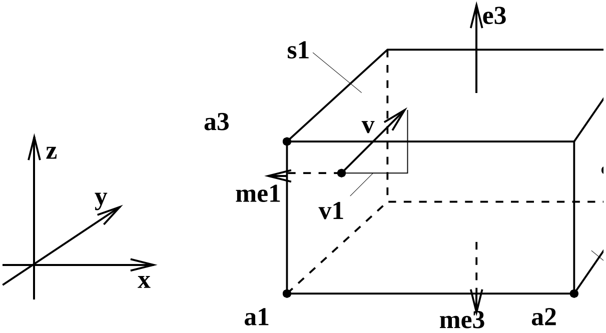


Abbildung 8.31: Fluss des Vektors **v** durch die Begrenzungsflächen S_1, S_2 des Quaders Q

Illustration zum Satz von GAUSS

Buch Kap. 8.11

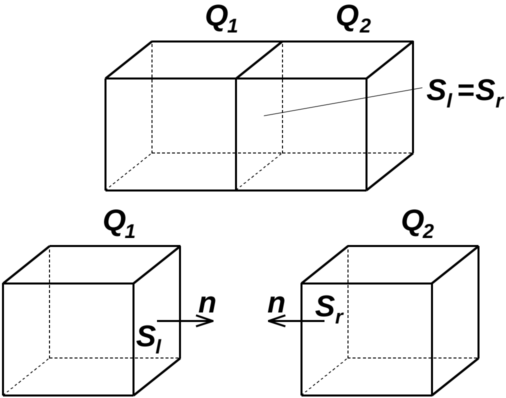


Abbildung 8.32: $Q = Q_1 \cup Q_2$, Flüsse über S_l und S_r heben sich auf.

Satz von GAUSS

Buch Kap. 8.11

Satz 8.20: (Satz von GAUSS)

Sei B ein regulärer Bereich, die Normale $\mathbf{n}$ weise in den Randpunkten von B aus B heraus (man spricht hier auch von der äußeren Normalen). Dann gilt

$$\int_B \operatorname{div} \mathbf{v}\, dV = \int_{\partial B} \mathbf{v} \cdot \mathbf{dO} = \int_{\partial B} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n})\, dO\,.$$

Satz von GAUSS

Buch Kap. 8.11

Beispiel (Satz von GAUSS)

Beispiel (Satz von GAUSS)

Beispiel (Satz von GAUSS)

Satz von GAUSS

Buch Kap. 8.11

Erste Greensche Formel

$$\int_{\partial B} \varphi \frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}} \, dO = \int_B [\varphi \, \Delta \, f + \operatorname{grad} \varphi \cdot \operatorname{grad} f] dV.$$

Zweite Greensche Formel

$$\int_{\partial B} \varphi \frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}} - f \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{n}} \, dO = \int_B [\varphi \, \Delta \, f - f \, \Delta \, \varphi] dV.$$