Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. T. Reis

WiSe 2018/2019

Klausur zur Mathematik III
(Modul: Analysis III)

5. März 2019

Sie haben 60 Minuten Zeit zum Bearbeiten der Klausur. Es gehen maximal 20 Punkte in die Wertung ein. Bitte kennzeichnen Sie jedes Blatt mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer.

Tragen Sie bitte zunächst Ihren Namen, Ihren Vornamen und Ihre Matrikelnummer in **DRUCKSCHRIFT** in die folgenden jeweils dafür vorgesehenen Felder ein. Diese Eintragungen werden auf Datenträger gespeichert.

Name:

Vorname:

Matr.-Nr.:

Stg: | AIW | BU | CI | ET | GES | IN | LUM | MB | MTB | SB | BV | EUT | VT | |

Wertung nach DPO : zus. mit Differentialgleichungen I ☐ Einzelwertung ☐

Ich bin darüber belehrt worden, dass die von mir zu erbringende Prüfungsleistung nur dann bewertet wird, wenn die Nachprüfung durch das Zentrale Prüfungsamt der TUHH meine offizielle Zulassung vor Beginn der Prüfung ergibt.

(Unterschrift)

Aufg.	**Punkte**	**Korrekteur**
1		
2		
3		
4		

$\sum =$

Aufgabe 1) (7 Punkte)

Gegeben sei die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x,y) := x \cdot y^2 + \cos(x+y) + 2y + 3 .$$

a) Bestimmen Sie das Taylorpolynom zweiten Grades T_2 von f zum Entwicklungspunkt $(x_0, y_0) = (0,0)$.

b) Zeigen Sie, dass für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ mit $|x| \leq 0.2$ und $|y| \leq 0.2$ gilt:

$$|f(x,y) - T_2(x,y)| \leq \frac{4}{100} .$$

Lösung:

a) **(Ableitungen: 2 Punkte, Werte in (0,0): 1 Punkt)**

$$\begin{array}{ll}
f(x,y) = x \cdot y^2 + \cos(x+y) + 2y + 3 & f(0,0) = 4 \\
f_x(x,y) = y^2 - \sin(x+y) & f_x(0,0) = 0 \\
f_y(x,y) = 2xy - \sin(x+y) + 2 & f_y(0,0) = 2 \\
f_{xx}(x,y) = -\cos(x+y) & f_{xx}(0,0) = -1 \\
f_{xy}(x,y) = 2y - \cos(x+y) & f_{xy}(0,0) = -1 \\
f_{yy}(x,y) = 2x - \cos(x+y) & f_{yy}(0,0) = -1
\end{array}$$

$$T_2(x,y) = 4 + 2y - \frac{x^2}{2} - xy - \frac{y^2}{2} . \qquad \textbf{(1 Punkt)}$$

b) (3 Punkte)

Für die Fehlerabschätzung berechnen wir für die Beträge aller dritten Ableitungen eine, für alle $(x,y) \in D$ gültige, gemeinsame obere Schranke.

$$\begin{aligned}
|\, f_{xxx}(x,y)\,| &= |\sin(x+y)\,| \leq 1 \\
|\, f_{xxy}(x,y)\,| &= |\sin(x+y)\,| \leq 1 \\
|\, f_{xyy}(x,y)\,| &= |\,2 + \sin(x+y)\,| \leq 2 + 1 = 3 \\
|\, f_{yyy}(x,y)\,| &= |\sin(x+y)\,| \leq 1.
\end{aligned}$$

Die Beträge aller dritten Ableitungen von f, in allen Punkten aus D, sind also nach oben durch $C := 3$ beschränkt. **(2 Punkte)**

Der Fehler $|f(x,y) - T_2(x,y)|$ kann wie folgt abgeschätzt werden:

$$|f(x,y) - T_2(x,y)| \leq \frac{2^3}{3!} \cdot \|(x,y)\|_\infty^3 \cdot C \leq \frac{8}{6} \cdot \frac{2^3}{10^3} \cdot 3 = \frac{8 \cdot 2^2}{1000} = \frac{32}{1000} < \frac{4}{100}.$$

(1 Punkt)

Aufgabe 2: (9 Punkte)

Seien für $\boldsymbol{x} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ die Funktionen

$$\mathbf{f}(x, y, z) = \begin{pmatrix} x^2 + yz + 2x \\ xz + y^3 + 3y^2z^2 \\ xy + 2y^3z \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{g}(x, y, z) = \begin{pmatrix} -2y \\ 2x + 1 \\ z \end{pmatrix}$$

gegeben.

Weiterhin sei die Kurve $\boldsymbol{c}$ gegeben durch:

$$\mathbf{c}(t) = \big(\cos(t)\ ,\ 2\sin(t)\ ,\ t^2 - 2\pi \cdot t\big)^T\ ,\ t \in [0, 2\pi]\ .$$

a) Berechnen Sie die Rotationen $\mathbf{rot\ f}$ und $\mathbf{rot\ g}$.

b) Geben Sie den Anfangspunkt und den Endpunkt der Kurve $\boldsymbol{c}$ an.

c) Berechnen Sie die beiden Kurvenintegrale $\int_{\mathbf{c}} \mathbf{f}\, d\boldsymbol{x}$ und $\int_{\mathbf{c}} \mathbf{g}\, d\boldsymbol{x}$.

Lösung:

a) $\mathbf{rot}\ \boldsymbol{f}(x, y, z) = \begin{pmatrix} (f_3)_y - (f_2)_z \\ (f_1)_z - (f_3)_x \\ (f_2)_x - (f_1)_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6y^2z - 6y^2z \\ y - y \\ z - z \end{pmatrix} = \mathbf{0}.$ **(1 Punkt)**

$\mathbf{rot\ g} = \begin{pmatrix} (g_3)_y - (g_2)_z \\ (g_1)_z - (g_3)_x \\ (g_2)_x - (g_1)_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 - 0 \\ 0 - 0 \\ 2 - (-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}.$ **(1 Punkt)**.

b) $\boldsymbol{c}(0) = \boldsymbol{c}(2\pi) = (1, 0, 0)^T.$ **(1 Punkt)**.

c) Da die Funktion $\mathbf{f}$ ein Potential Φ besitzt, verschwindet das Integral über jeden geschlossenen Weg. Es gilt also

$$\int_{\mathbf{c}} \mathbf{f}\, d\boldsymbol{x} = 0\,. \qquad \textbf{(1 Punkt)}$$

Das Kurvenintegral $\int_{\mathbf{c}} \mathbf{g}\, d\boldsymbol{x}$ muss man direkt berechnen:

$$\mathbf{g}(\mathbf{c}(t)) = \begin{pmatrix} -4\sin(t) \\ 2\cos(t) + 1 \\ t^2 - 2\pi t \end{pmatrix}, \quad \textbf{(1 Punkt)} \qquad \dot{\boldsymbol{c}}(t) = \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ 2\cos(t) \\ 2t - 2\pi \end{pmatrix}. \quad \textbf{(1 Punkt)}$$

$$\langle\ \mathbf{g}(\mathbf{c}(t))\ ,\ \dot{\boldsymbol{c}}(t)\ \rangle \ =\ 4\sin^2(t) + 4\cos^2(t) + 2\cos(t) + (t^2 - 2\pi t)(2t - 2\pi)\,.$$

$$\langle\ \mathbf{g}(\mathbf{c}(t))\ ,\ \dot{\boldsymbol{c}}(t)\ \rangle \ =\ 4 + 2\cos(t) + 2t^3 - 2\pi t^2 - 4\pi t^2 + 4\pi^2 t\,. \qquad \textbf{(1 Punkt)}$$

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{c}} \mathbf{g}\, d\boldsymbol{x} &= \int_0^{2\pi} \langle\ \mathbf{g}(\mathbf{c}(t))\ ,\ \mathbf{c}'(t)\ \rangle\, dt \\ &= \int_0^{2\pi} 4 + 2\cos(t) + 2t^3 - 2\pi t^2 - 4\pi t^2 + 4\pi^2 t\, dt \\ &= 8\pi + \left[\frac{t^4}{2} - 2\pi t^3 + 2\pi^2 t^2\right]_0^{2\pi} = 8\pi + 8\pi^4 - 16\pi^4 + 8\pi^4 = 8\pi. \qquad \textbf{[2 Punkte]} \end{aligned}$$

Aufgabe 3: (4 Punkte)

Gegeben sei der Körper

$$P \subset \mathbb{R}^3, \quad P = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : 0 \le z \le \frac{\pi}{2}, -z \le x \le z, -z \le y \le z \right\},$$

sowie die Funktion $f(x,y,z) = \cos(x)$.

Berechnen Sie $\displaystyle\int_P f(x,y,z)\, d(x,y,z)$.

Lösung zu Aufgabe 3)

$$\begin{aligned}
\int_P f\, d\boldsymbol{x} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_{-z}^{z} \int_{-z}^{z} \cos(x)\, dy\, dx\, dz \qquad \textbf{(1 Punkt)} \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_{-z}^{z} \cos(x) \cdot [y]_{-z}^{z}\, dx\, dz = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_{-z}^{z} 2z\cos(x)\, dx\, dz \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_{-z}^{z} 2z(\cos(x))\, dx\, dz = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2z\, [\sin(x)]_{-z}^{z}\, dz \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2z\, (\sin(z) - \sin(-z)) dz = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 4z\, \sin(z)\, dz \\
&= [-4z\cos(z)]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} 4\cos(z)\, dz \\
&= -2\pi\cos(\frac{\pi}{2}) - 0 + [4\sin(z)]_0^{\frac{\pi}{2}} = 4. \qquad \textbf{(3 Punkte)}
\end{aligned}$$

Aufgabe 4: (4 Punkte)

a) Welche der folgenden Matrizen kann die Hesse-Matrix einer zweimal stetig partiell differenzierbaren Funktion f ausgewertet im Punkt $(0,0)$ sein? Begründen Sie Ihre Antwort.

$$\boldsymbol{H}^{[1]} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{H}^{[2]} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{H}^{[3]} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

b) Geben Sie eine Funktion g an, die im Punkt $(0,0)$ ein globales Maximum hat, deren Hesse-Matrix in $(0,0)$ jedoch nicht negativ definit ist.

Lösung:

a) Hesse-Matrizen sind nur für Funktionen $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definiert. Dabei kommt nur $H^{[2]}$ in Frage, da die Hesse Matrix einer zwei Mal stetig partiell differenzierbaren Funktion symmetrisch ist. **(2 Punkte)**

b) Extrema sind nur für Funktionen $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definiert. In Frage kommt Zum Beispiel

$g(x,y) = -x^4 - y^4$. Offensichtlich ist

$$g(x,y) < 0, \qquad \forall (x,y) \neq (0,0) \qquad \text{und} \qquad g(0,0) = 0\,.$$

$$\boldsymbol{H}\, g(x,y) = \begin{pmatrix} -12x^2 & 0 \\ 0 & -12y^2 \end{pmatrix} \implies \boldsymbol{H}\, g(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \qquad \textbf{(2 Punkte)}$$

Es gibt unendlich viele Möglichkeiten, zum Beispiel auch einfach eine Konstante, oder $g(x) = -x^2 + K$, oder $g(x) = -x^2 + \cos(y)$, oder ....

Viel Erfolg!