Aufgabe 1: (7 Punkte)

Gegeben sei die Funktion

$$f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x,y) := x\cdot y^2 + \cos(x+y) + 2y + 3\,.$$

a) Bestimmen Sie das Taylorpolynom zweiten Grades T_2 von f zum Entwicklungspunkt $(x_0,y_0)=(0,0)$.

b) Zeigen Sie, dass für alle $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ mit $|x| \le 0.2$ und $|y| \le 0.2$ gilt:

$$|f(x,y) - T_2(x,y)| \le \frac{4}{100}\,.$$

Aufgabe 2: (9 Punkte)

Seien für $\boldsymbol{x} = (x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ die Funktionen

$$\mathbf{f}(x,y,z) = \begin{pmatrix} x^2 + yz + 2x \\ xz + y^3 + 3y^2z^2 \\ xy + 2y^3z \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \mathbf{g}(x,y,z) = \begin{pmatrix} -2y \\ 2x + 1 \\ z \end{pmatrix}$$

gegeben.

Weiterhin sei die Kurve $\boldsymbol{c}$ gegeben durch:

$$\mathbf{c}(t) = \big(\cos(t)\ ,\ 2\sin(t)\,,\ t^2 - 2\pi\cdot t\big)^T \ ,\ t\in[0,2\pi]\ .$$

a) Berechnen Sie die Rotationen $\mathbf{rot}\,\mathbf{f}$ und $\mathbf{rot}\,\mathbf{g}$.

b) Geben Sie den Anfangspunkt und den Endpunkt der Kurve $\boldsymbol{c}$ an.

c) Berechnen Sie die beiden Kurvenintegrale $\int_{\mathbf{c}} \mathbf{f}\,d\boldsymbol{x}$ und $\int_{\mathbf{c}} \mathbf{g}\,d\boldsymbol{x}$.

Aufgabe 3: (4 Punkte)

Gegeben sei der Körper

$$P\subset\mathbb{R}^3, \quad P = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : 0 \le z \le \frac{\pi}{2},\ -z \le x \le z,\ -z \le y \le z \right\},$$

sowie die Funktion $f(x,y,z) = \cos(x)$.

Berechnen Sie $\displaystyle\int_P f(x,y,z)\,d(x,y,z)$.

Bitte wenden!

Aufgabe 4: (4 Punkte)

a) Welche der folgenden Matrizen kann die Hesse-Matrix einer zweimal stetig partiell differenzierbaren Funktion f ausgewertet im Punkt $(0,0)$ sein? Begründen Sie Ihre Antwort.

$$\boldsymbol{H}^{[1]} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{H}^{[2]} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{H}^{[3]} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

b) Geben Sie eine Funktion g an, die im Punkt $(0,0)$ ein globales Maximum hat, deren Hessematrix in $(0,0)$ jedoch nicht negativ definit ist.

Viel Erfolg!