Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. T. Reis

SoSe 2019

Klausur zur Mathematik III
(Modul: Analysis III)

30. August 2019

Sie haben 60 Minuten Zeit zum Bearbeiten der Klausur. Es gehen maximal 20 Punkte in die Wertung ein.Bitte kennzeichnen Sie jedes Blatt mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer.

Tragen Sie bitte zunächst Ihren Namen, Ihren Vornamen und Ihre Matrikelnummer in **DRUCKSCHRIFT** in die folgenden jeweils dafür vorgesehenen Felder ein. Diese Eintragungen werden auf Datenträger gespeichert.

Name:

Vorname:

Matr.-Nr.:

Stg:	AIW	BU	CI	ET	GES	IN	LUM	MB	MTB	SB	BV	EUT	VT	

Wertung nach DPO : zus. mit Differentialgleichungen I ☐ Einzelwertung ☐

Ich bin darüber belehrt worden, dass die von mir zu erbringende Prüfungsleistung nur dann bewertet wird, wenn die Nachprüfung durch das Zentrale Prüfungsamt der TUHH meine offizielle Zulassung vor Beginn der Prüfung ergibt.

(Unterschrift)

Aufg.	**Punkte**	**Korrekteur**
1		
2		
3		

$\sum =$

Aufgabe 1: (2 + 4 + 4 Punkte)

Gegeben ist die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\,,\; f(x,y) \;=\; x^2 + y^2 + \frac{xy}{2} - 2x\,.$$

a) Berechnen Sie den Gradienten und die Hessematrix von f.

b) Berechnen und klassifizieren Sie alle stationären Punkte von f, also alle Punkte mit $\operatorname{grad} f(x,y) = \mathbf{0}$.

c) Zeigen Sie, dass in $P_0 := (\frac{4}{5}, 0)^T$ ein lokales Minimum der Funktion f unter der Nebenbedingung

$$h(x,y) \;=\; x \;-\; e^y \;+\; \frac{1}{5} = 0$$

vorliegt.

Lösungsskizze:

a) grad $f(x,y) = (2x+\frac{y}{2}-2, 2y+\frac{x}{2})$, $\qquad \mathrm{H}\, f(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 2 \end{pmatrix}$. **(2 Punkte)**

b) grad $f(x,y) = \mathbf{0} \Longrightarrow$

$2y + \frac{x}{2} = 0 \iff x = -4y$.

Und $2x + \frac{y}{2} - 2 = -8y + \frac{y}{2} - 2 = 0 \iff y = \frac{-4}{15}$.

$P_1 = \begin{pmatrix} \frac{16}{15} \\ -\frac{4}{15} \end{pmatrix}$ ist der einzige stationäre Punkt von f. **(2 Punkte)**

Hesse Matrix von f: $\qquad \boldsymbol{H}\, f = \begin{pmatrix} 2 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 2 \end{pmatrix}$.

Eigenwerte der Hessematrix: $(\lambda - 2)^2 - \frac{1}{4} = 0 \Longrightarrow \lambda_{1,2} = 2 \pm \frac{1}{2}$.

Es liegt also das Minimum von f vor! **(2 Punkte)**

c) Mit $L = f - \mu h$ muss für einen zulässigen, stationären Punkt gelten:

$$\begin{aligned} L_x(x,y;\mu) \;&=\; 2x + \frac{y}{2} - 2 \;-\; \mu \;= 0\,, \\ L_y(x,y;\mu) \;&=\; 2y + \frac{x}{2} \;-\; \mu(-e^y) \;= 0\,, \\ h(x,y) \;&=\; x \;-\; e^y \;+\; \frac{1}{5} \;= 0\,. \end{aligned}$$

Im gegebenen Punkt also

$$L_x(\frac{4}{5}, 0; \mu) \;=\; \frac{8}{5} \;-\; 2 \;-\; \mu \;=\; 0 \Longrightarrow \mu = -\frac{2}{5},$$

mit diesem μ gilt

$$L_y(\frac{4}{5}, 0; -\frac{2}{5}) \;=\; \frac{2}{5} \;-\; \frac{2}{5} \;=\; 0.$$

Beide Bedingungen werden also mit $\mu = -\frac{2}{5}$ erfüllt.

Außerdem gilt: $h(\frac{4}{5}, 0) = \frac{4}{5} - e^0 + \frac{1}{5} = 0$. **(3 Punkte)**

Die Hessematrix ist: $\boldsymbol{H}\, L(x, y; -\frac{2}{5}) = \begin{pmatrix} 2 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 2 - \frac{2}{5}e^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{8}{5}e^0 \end{pmatrix}$

Die Determinante dieser Matrix ist ebenso positiv wie das Element $\boldsymbol{H}\, L_{11}$. Die Matrix ist positiv definit. Es liegt ein Minimum vor.

Alternativ: Nach Gerschgorin liegen die Eigenwerte von $\boldsymbol{H}\, L$ in Kreisen mit Radius $\frac{1}{2}$ um 2 bzw. $\frac{8}{5}$.

Alternativ: Als charakteristisches Polynom erhält man:

$p(\mu) = (2 - \mu)(\frac{8}{5} - \mu) - \frac{1}{4} = \mu^2 - \frac{18}{5}\mu + \frac{16}{5} - \frac{1}{4} = 0$

mit den Eigenwerten $\mu_{1,2} = \frac{18}{10} \pm \frac{\sqrt{21}}{10} > 0$.

Beide Eigenwerte sind positiv, denn $\sqrt{21} < 18$. Es liegt also ein Minimum von f unter der Nebenbedingung $h = 0$ vor. **(1 Punkt)**

Aufgabe 2) (5 + 1 + 3 + 1 Punkte)

Gegeben sei

$$K := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \ : \ 0 \le x^2 + y^2 + z^2 \le 16,\ y \ge 0 \right\},$$

und das Vektorfeld

$$\boldsymbol{f} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ \boldsymbol{f}(x, y, z) = \begin{pmatrix} x + y^2 \\ 2y \\ 3z + x^2 \end{pmatrix}.$$

a) Berechnen Sie $\displaystyle\int_K \operatorname{div} \boldsymbol{f}(x, y, z)\, d(x, y, z)\,.$

b) K ist berandet durch ein ebenes Flächenstück W und ein gewölbtes Flächenstück M. Geben Sie eine Parametrisierung von W an.

c) Berechnen Sie den Fluss von $\boldsymbol{f}$ durch W, also

$$\int_W \boldsymbol{f} \cdot dO\,.$$

d) Wie groß ist nach a) und c) der Fluss durch den gewölbten Teil des Randes von K, also

$$\int_M \boldsymbol{f} \cdot dO\,?$$

Lösung:

a) $\operatorname{div} \boldsymbol{f}(x, y, z)\, d(x, y, z) = 1 + 2 + 3 = 6\,.$ **[1 Punkt]**

Parametrisierung von K:

Kugelkoordinaten: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos(\varphi)\cos(\theta) \\ r\sin(\varphi)\cos(\theta) \\ r\sin(\theta) \end{pmatrix}$

$0 \le r^2 = x^2 + y^2 + z^2 \le 16 \implies r \in [0, 4], \qquad \theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

$y = r\sin(\varphi)\cos(\theta) \ge 0 \implies \varphi \in [0, \pi]$ **[2 Punkte]**

$$\int_K \operatorname{div} \boldsymbol{f}(x, y, z)\, d(x, y, z) = \int_0^4 \int_0^\pi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 6 \cdot r^2 \cos(\theta)\, d\theta\, d\phi\, dr \qquad \textbf{[1 Punkt]}$$

$$= \int_0^4 \int_0^\pi 6r^2\, [\sin(\theta)]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\, d\phi\, dr = \int_0^4 \int_0^\pi 12r^2\, d\phi\, dr$$

$$= \int_0^4 12r^2\, [\varphi]_0^\pi\, dr = 4\pi \int_0^4 3r^2\, dr = 4\pi(4^3 - 0^3). \ \textbf{[1 Punkt]}$$

b) Parametrisierung von W: Kreisscheibe mit Radius 4 um Null und $y = 0$.
$p(r, \theta) = (r\cos(\theta),\, 0,\, r\sin(\theta))^T$, $\theta \in [0, 2\pi]$, $0 \le r \le 4$. [**1 Punkt**]

c) [**3 Punkte**]

$$\frac{dp}{dr} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) \\ 0 \\ \sin(\theta) \end{pmatrix}, \quad \frac{dp}{d\theta} = \begin{pmatrix} -r\sin(\theta) \\ 0 \\ r\cos(\theta) \end{pmatrix}$$

$$\frac{dp}{d\theta} \times \frac{dp}{dr} = \begin{pmatrix} 0 \\ -r \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$< \begin{pmatrix} 0 \\ -r \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{f}\,(p(r,\theta)) > = < \begin{pmatrix} 0 \\ -r \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \cdots \\ 0 \\ \cdots \end{pmatrix} > = 0.$$

Also $\displaystyle\int_W \boldsymbol{f} \cdot dO = 0$.

d) Mit dem Satz von Gauß ergibt sich aus a) und b) [**1 Punkt**]

$$\int_M \boldsymbol{f} \cdot dO = \int_K \operatorname{div} \boldsymbol{f}\,(x,y,z)\, d(x,y,z) - \int_W \boldsymbol{f} \cdot dO = 4^4\pi.$$

Aufgabe 3: (4 (Zusatz)Punkte)

a) Für eine Funktion $\boldsymbol{f} : D \to \mathbb{R}^3,\ D \subset \mathbb{R}^3$ gelte
   $\mathbf{rot}\,\boldsymbol{f}\,(x, y, z) = \mathbf{0}$
   und
   mit $c : [0, 2\pi] \to D,\ \ \boldsymbol{c}\,(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \\ 1 \end{pmatrix}$
   gelte : $\displaystyle\int_{\boldsymbol{c}} \boldsymbol{f}\,(x, y, z) = 1.$
   Besitzt $\boldsymbol{f}$ ein Potential? Begründen Sie Ihre Antwort.

b) Durch $f(x, y) \; = \; x^3 - 2y^2 + y + 2 \; = \; 0$ ist in der Umgebung von $P_0 = (1, -1)$ implizit eine Funktion $y = g(x)$ definiert. Es gilt also lokal

$$f(x, y) \; = \; 0 \implies y = g(x), \quad g(1) = -1\,.$$

   Berechnen Sie $g\,'(1)\,.$

Lösung:

a) Nein. Es kann nur ein Potential geben, wenn das Integral von $\boldsymbol{f}$ über jede geschlossene Kurve verschwindet.

b) $g\,'(1) = -\dfrac{f_x(1, -1)}{f_y(1, -1)} \; = \; -\dfrac{3x^2}{-4y + 1}\Bigg|_{x=1, y=-1} \; = \; -\frac{3}{5}.$