Aufgabe 1: (2 + 4 + 4 Punkte)

Gegeben ist die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\,,\; f(x,y) \;=\; x^2 + y^2 + \frac{xy}{2} - 2x\,.$$

a) Berechnen Sie den Gradienten und die Hessematrix von f .

b) Berechnen und klassifizieren Sie alle stationären Punkte von f , also alle Punkte mit $\operatorname{grad} f(x,y) = \mathbf{0}$.

c) Zeigen Sie, dass in $P_0 := (\frac{4}{5}, 0)^T$ ein lokales Minimum der Funktion f unter der Nebenbedingung

$$h(x,y) \;=\; x \;-\; e^y \;+\; \frac{1}{5} = 0$$

vorliegt.

Aufgabe 2) (5 + 1 + 3 + 1 Punkte)

Gegeben sei

$$K := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;:\; 0 \le x^2 + y^2 + z^2 \le 16,\; y \ge 0 \right\}\,,$$

und das Vektorfeld

$$\boldsymbol{f} \;: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\; \boldsymbol{f}\,(x,y,z) \;=\; \begin{pmatrix} x + y^2 \\ 2y \\ 3z + x^2 \end{pmatrix}\,.$$

a) Berechnen Sie $\displaystyle\int_K \operatorname{div}\; \boldsymbol{f}\,(x,y,z)\, d(x,y,z)\,.$

b) K ist berandet durch ein ebenes Flächenstück W und ein gewölbtes Flächenstück M . Geben Sie eine Parametrisierung von W an.

c) Berechnen Sie den Fluss von $\boldsymbol{f}$ durch W , also

$$\int_W \boldsymbol{f}\; \cdot dO\,.$$

d) Wie groß ist nach a) und c) der Fluss durch den gewölbten Teil des Randes von K , also

$$\int_M \boldsymbol{f}\; \cdot dO\,?$$

Aufgabe 3: (4 Punkte)

a) Für eine Funktion $\boldsymbol{f} : D \to \mathbb{R}^3,\ D \subset \mathbb{R}^3, D$ offen, gelte

$\textbf{rot}\,\boldsymbol{f}\,(x,y,z) = \mathbf{0}$

und

mit $c : [0, 2\pi] \to D, \ \ \boldsymbol{c}\,(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \\ 1 \end{pmatrix}$

gelte : $\displaystyle\int_{\boldsymbol{c}} \boldsymbol{f}\,(x,y,z) = 1.$

Besitzt $\boldsymbol{f}$ ein Potential? Begründen Sie Ihre Antwort.

b) Durch $f(x,y) = x^3 - 2y^2 + y + 2 = 0$ ist in der Umgebung von $P_0 = (1, -1)$ implizit eine Funktion $y = g(x)$ definiert. Es gilt also lokal

$$f(x,y) = 0 \Longrightarrow y = g(x), \quad g(1) = -1\,.$$

Berechnen Sie $g\,'(1)$.

Viel Erfolg!