Analysis III

Winter 2017/2018

Jörn Behrens
mit
Kai Rothe

Volumenintegrale und Satz von Gauss

Buch Kapitel 8.8-8.10

Einführung und Grundbegriffe

Vorbemerkungen:

- **Ziel**: Volumenberechnungen!
- **Vorgehen**: Direkte Verallgemeinerung der Flächenberechnungen
- Die Betrachtung von Riemann Summen wird nicht wiederholt!

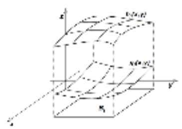
Vorbemerkung: Fasse die zu integrierenden Bereiche mathematisch:
Der einfachste Bereich ist ein Quader:

$$B = [a,b] \times [c,d] \times [e,f] = \{(x,y,z)^\top : a \le x \le b, c \le y \le d, e \le z \le f\}.$$

Definition: (Normalbereich)
Einen Bereich $B_1 \subset \mathbb{R}^3$ nennt man Normalbereich vom Typ I, wenn es einen regulären Bereich $B_1' \subset \mathbb{R}^2$, ein Gebiet $D' \subset B_1'$, sowie stetig diff'bare Funktionen $g_I, h_I : D' \to \mathbb{R}$ gibt mit

$$B_1 = \{(x,y,z)^\top : (x,y)^\top \in B_1' g_I(x,y \le z \le h_i(x,y)\}.$$

Analog werden Normalbereiche vom Typ II und Typ III definiert, bei denen Funktionen $g_{II}(y,z)$ und $h_{II}(y,z)$ untere und obere Grenze von x, bzw. $g_{III}(x,z)$ und $h_{III}(x,z)$ untere und obere Grenze von y darstellen.



Vorbemerkungen:

- **Ziel**: Volumenberechnungen!
- **Vorgehen**: Direkte Verallgemeinerung der Flächenberechnungen
- Die Betrachtung von Riemann Summen wird nicht wiederholt!

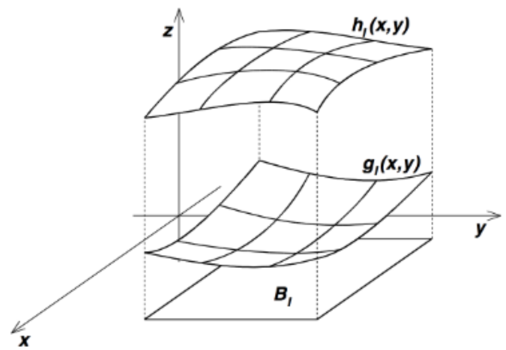
Vorbemerkung: Fasse die zu integrierenden Bereiche mathematisch:
Der einfachste Bereich ist ein Quader:

$$B = [a, b] \times [c, d] \times [e, f] = \{(x, y, z)^\top : a \leq x \leq b, c \leq y \leq d, e \leq z \leq f\}.$$

Definition: (Normalbereich)
Einen Bereich $B_1 \subset \mathbb{R}^3$ nennt man Normalbereich vom Typ I, wenn es einen regulären Bereich $B_1' \subset \mathbb{R}^2$, ein Gebiet $D' \subset B_1'$, sowie stetig diff'bare Funktionen $g_I, h_I : D' \to \mathbb{R}$ gibt mit

$$B_1 = \{(x,y,z)^\top : (x,y)^\top \in B_1' g_I(x,y \leq z \leq h_i(x,y)\}.$$

Analog werden Normalbereiche vom Typ II und Typ III definiert, bei denen Funktionen $g_{II}(y,z)$ und $h_{II}(y,z)$ untere und obere Grenze von x, bzw. $g_{III}(x,z)$ und $h_{III}(x,z)$ untere und obere Grenze von y darstellen.



Volumen von Normalbereichen

Satz: (Volumen eines Normalbereiches im $\mathbb{R}^3$)
Seien B_1, B_2, und B_3 Normalbereiche vom Typ I, II, bzw. III. Dann gilt für die Volumina $V(B_i)$ $(i = 1, 2, 3)$:

$$\begin{aligned}
V(B_1) &= \int_{B_1} dV = \int_{B_1'} (h_I - g_I)\, dF, \\
V(B_2) &= \int_{B_2} dV = \int_{B_2'} (h_{II} - g_{II})\, dF, \\
V(B_3) &= \int_{B_3} dV = \int_{B_3'} (h_{III} - g_{III})\, dF.
\end{aligned}$$

Satz: (Volumen eines Normalbereiches im $\mathbb{R}^3$)
Seien B_1, B_2, und B_3 Normalbereiche vom Typ I, II, bzw. III. Dann gilt für die Volumina $V(B_i)$ $(i = 1, 2, 3)$:

$$\begin{aligned}
V(B_1) &= \int_{B_1} dV = \int_{B_1'} (h_I - g_I)\, dF, \\
V(B_2) &= \int_{B_2} dV = \int_{B_2'} (h_{II} - g_{II})\, dF, \\
V(B_3) &= \int_{B_3} dV = \int_{B_3'} (h_{III} - g_{III})\, dF.
\end{aligned}$$

Volumenintegral

Satz: (Volumenintegral über Quader im $\mathbb{R}^3$)
Seien $B = [a,b] \times [c,d] \times [e,f]$ ein Quader und $f : B \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Dann gilt

$$\int_B f \, dV = \int_a^b \left[\int_c^d \left(\int_e^f f \, dz \right) dy \right] dx.$$

Bemerkung: Alle Permutationen der Verschachtelung der Integrale sind ebenfalls gleich. Der Beweis wird über Riemann Integrale analog zum Satz über Flächenintegrale geführt.

Satz: (Volumenintegral über Normalbereich im $\mathbb{R}^3$)
Sei B_1 ein Normalbereich vom Typ I

$$B_1 = \{(x,y,z)^\top : (x,y)^\top \in B_1', g_I(x,y \leq z \leq h_i(x,y)\}$$

und sei $f : B_1 \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, dann gilt

$$\int_{B_1} f \, dV = \int_{B_1'} \left[\int_{g_I(x,y)}^{h_I(x,y)} f \quad dz \right] dxdy.$$

Bemerkung: Analog werden die Integrale über Normalbereichen vom Typ II und III gebildet: in jedem Fall wird das Volumenintegral auf ein Flächenintegral und ein "eindimensionales" Integral zurück geführt.

Satz: (Integral über Vereinigung von Normalbereichen)
Sei $B = \bigcup_{j=1}^k B_j$ endliche Vereinigung von Normalbereichen B_j vom Typ I, II oder III, wobei für $i \neq j$ der Schnitt $B_i \cap B_j$ Nullmenge sei. Dann gilt für die stetige Funktion $f : B \to \mathbb{R}$:

$$\int_B f \, dV = \sum_{j=1}^k \int_{B_j} f \, dV.$$

Satz: (Volumenintegral über Quader im $\mathbb{R}^3$)
Seien $B = [a,b] \times [c,d] \times [e,f]$ ein Quader und $f : B \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion.
Dann gilt

$$\int_B f \; dV = \int_a^b \left[\int_c^d \left(\int_e^f f \; dz \right) \; dy \right] \; dx.$$

Bemerkung: Alle Permutationen der Verschachtelung der Integrale sind ebenfalls gleich. Der Beweis wird über Riemann Integrale analog zum Satz über Flächenintegrale geführt.

Satz: (Volumenintegral über Normalbereich im $\mathbb{R}^3$)
Sei B_1 ein Normalbereich vom Typ I

$$B_1 = \{(x, y, z)^\top : (x, y)^\top \in B_1', g_I(x, y \leq z \leq h_i(x, y)\}$$

und sei $f : B_1 \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, dann gilt

$$\int_{B_1} f \, dV = \int_{B_1'} \left[\int_{g_I(x,y)}^{h_I(x,y)} f \quad dz \right] dxdy.$$

Bemerkung: Analog werden die Integrale über Normalbereichen vom Typ II und III gebildet: in jedem Fall wird das Volumenintegral auf ein Flächenintegral und ein "eindimensionales" Integral zurück geführt.

Satz: (Integral über Vereinigung von Normalbereichen)
Sei $B = \bigcup_{j=1}^{k} B_j$ endliche Vereinigung von Normalbereichen B_j vom Typ I, II oder III, wobei für $i \neq j$ der Schnitt $B_i \cap B_j$ Nullmenge sei. Dann gilt für die stetige Funktion $f : B \to \mathbb{R}$:

$$\int_B f \; dV = \sum_{j=1}^{k} \int_{B_j} f \; dV.$$

Transformationsformel

Motivation: (Transformationsformel im $\mathbb{R}^3$)
Wie zuvor bei den Flächenintegralen soll nun die im 1D nützliche Substitutionsregel

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} f(\varphi(t))\,\frac{d\varphi(t)}{dt}\,dt$$

in den $\mathbb{R}^3$ übertragen werden.

Bemerkungen:

- Ein regulärer Bereich im $\mathbb{R}^3$ ist eine abgeschlossene, von einer stückweise regulären Fläche berandete Punktmenge, deren Inneres ein einfach zusammenhängendes Gebiet ist.
- Die Transformationsregel ist auch dann erfüllt, wenn $\curvearrowleft$ auf Nullmengen in B bzw. $\tilde{B}$ nicht injektiv ist.
  Das ist für Koordinatentrafo aus Zylinderkoordinaten oder Kugelkoordinaten wichtig.

Definition: (Koordinatentransformation im $\mathbb{R}^3$)
Seien D und $\tilde{D}$ zwei Gebiete im $\mathbb{R}^3$. Ein zweimal stetig diff'bare Abbildung

$$\mathbf{x} : D \to \tilde{D},\ \mathbf{x}(u,v,w) = \begin{pmatrix} x(u,v,w) \\ y(u,v,w) \\ z(u,v,w) \end{pmatrix}$$

heißt Koordinatentransformation, wenn $\mathbf{x}$ injektiv ist und wenn die Determinante der Ableitungsmatrix für alle $(u,v,w)^\top \in D$ nicht verschwindet:

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} = \det(J_{\mathbf{x}}(u,v,w)) = \det \begin{pmatrix} x_u(u,v,w) & x_v(u,v,w) & z_w(u,v,w) \\ y_u(u,v,w) & y_v(u,v,w) & y_w(u,v,w) \\ z_u(u,v,w) & z_v(u,v,w) & z_w(u,v,w) \end{pmatrix}.$$

Die Determinante $\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}$ heißt Funktionaldeterminante von $\mathbf{x}$.

Satz: (Transformationsregel für Volumenintegrale)
Seien B und $\tilde{B}$ zwei reguläre Bereiche im $\mathbb{R}^3$, D und $\tilde{D}$ zwei Gebiete mit $B \subset D$ und $\tilde{B} \subset \tilde{D}$, sowie $\mathbf{x} : D \to \tilde{D}$ eine Koordinatentransformation von B auf $\tilde{B}$. Sei weiter $f : \tilde{B} \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Dann gilt:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{x}(B)} f\,dV &= \int_{\tilde{B}} f(x,y,z)\,dxdydz \\ &= \int_B f(x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w)) \left| \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} \right| dudvdw. \end{aligned}$$

Motivation: (Transformationsformel im $\mathbb{R}^3$)
Wie zuvor bei den Flächenintegralen soll nun die im 1D nützliche Substitutionsregel

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_{\phi^{-1}(a)}^{\phi^{-1}(b)} f(\phi(t)) \frac{d\phi(t)}{dt} dt$$

in den $\mathbb{R}^3$ übertragen werden.

Definition: (Koordinatentransformation im $\mathbb{R}^3$)
Seien D und $\tilde{D}$ zwei Gebiete im $\mathbb{R}^3$. Ein zweimal stetig diff'bare Abbildung

$$\mathbf{x} : D \to \tilde{D},\ \mathbf{x}(u,v,w) = \begin{pmatrix} x(u,v,w) \\ y(u,v,w) \\ z(u,v,w) \end{pmatrix}$$

heißt Koordinatentransformation, wenn $\mathbf{x}$ injektiv ist und wenn die Determinante der Ableitungsmatrix für alle $(u,v,w)^\top \in D$ nicht verschwindet:

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} = \det(J_{\mathbf{x}}(u,v,w)) = \det \begin{pmatrix} x_u(u,v,w) & x_v(u,v,w) & x_w(u,v,w) \\ y_u(u,v,w) & y_v(u,v,w) & y_w(u,v,w) \\ z_u(u,v,w) & z_v(u,v,w) & z_w(u,v,w) \end{pmatrix}.$$

Die Determinante $\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}$ heißt Funktionaldeterminante von $\mathbf{x}$.

Satz: (Transformationsregel für Volumenintegrale)
Seien B und $\tilde{B}$ zwei reguläre Bereiche im $\mathbb{R}^3$, D und $\tilde{D}$ zwei Gebiete mit $B \subset D$ und $\tilde{B} \subset \tilde{D}$, sowie $\mathbf{x} : D \to \tilde{D}$ eine Koordinatentransformation von B auf $\tilde{B}$. Sei weiter $f : \tilde{B} \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Dann gilt:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{x}(B)} f \; dV &= \int_{\tilde{B}} f(x,y,z) \; dxdydz \\ &= \int_{B} f(x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w)) \left| \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} \right| \; dudvdw. \end{aligned}$$

Bemerkungen:

- Ein regulärer Bereich im $\mathbb{R}^3$ ist eine abgeschlossene, von einer stückweise regulären Fläche berandete Punktmenge, deren Inneres ein einfach zusammenhängendes Gebiet ist.

- Die Transformationsregel ist auch dann erfüllt, wenn $\curvearrowleft$ auf Nullmengen in B bzw. $\tilde{B}$ nicht injektiv ist.
  Das ist für Koordinatentrafo aus Zylinderkoordinaten oder Kugelkoordinaten wichtig.

Satz von Gauß

Vorbemerkungen:

- Satz von Gauß stellt einen Zusammenhang zwischen Flussintegral über Oberfläche und Integral über eingeschlossenem Volumen her.
- Die Herleitung erfolgt zunächst über ein Quader im $\mathbb{R}^3$.
- Mathematisch erlaubt er die Vereinfachung der Integration.
- Physikalisch ist er für die Aufstellung von kontinuumsmechanischen Bilanzen wichtig (betrachte Vektorfeld als Strömungsgeschwindigkeit einer Flüssigkeit).

1

Satz: (Satz von Gauß)
Sei $B \subset \mathbb{R}^3$ ein regulärer Bereich mit äußerer Normalen $\mathbf{n}$ in den Punkten seines Randes ∂B. Sei $\mathbf{v}$ ein im Gebiet $D \supset B$ stetig diff'bares Vektorfeld. Dann gilt

$$\int_B \mathrm{div}\mathbf{v}\, dV = \int_{\partial B} \mathbf{v} \cdot \mathbf{dO} = \int_{\partial B} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dO.$$

Folgerung: (Erste Greensche Integralformel)

Folgerung: (Zweite Greensche Integralformel)

Satz von Gauß

Vorbemerkungen:

- Satz von Gauß stellt einen Zusammenhang zwischen Flussintegral über Oberfläche und Integral über eingeschlossenem Volumen her.
- Die Herleitung erfolgt zunächst über ein Quader im $\mathbb{R}^3$.
- Mathematisch erlaubt er die Vereinfachung der Integration.
- Physikalisch ist er für die Aufstellung von kontinuumsmechanischen Bilanzen wichtig (betrachte Vektorfeld als Strömungsgeschwindigkeit einer Flüssigkeit).

Satz: (Satz von Gauß)
Sei $B \subset \mathbb{R}^3$ ein regulärer Bereich mit äußerer Normalen $\mathbf{n}$ in den Punkten seines Randes ∂B. Sei $\mathbf{v}$ ein im Gebiet $D \supset B$ stetig diff'bares Vektorfeld. Dann gilt

$$\int_B \mathrm{div}\mathbf{v}\; dV = \int_{\partial B} \mathbf{v} \cdot \mathbf{dO} = \int_{\partial B} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dO.$$

Folgerung: (Erste Greensche Integralformel)
Es gelten die Voraussetzungen des Satzes von Gauß, f und φ seien zweimal stetig diff'bare Funktionen. Dann folgt

$$\int_B [\varphi \Delta f + \nabla \varphi \cdot \nabla f] \, dV = \int_{\partial B} \varphi \frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}} dO.$$

Folgerung: (Zweite Greensche Integralformel)
Es gelten die Voraussetzungen des Satzes von Gauß, f und φ seien zweimal stetig diff'bare Funktionen. Dann folgt

$$\int_B [\varphi \Delta f - f \Delta \varphi] \, dV = \int_{\partial B} [\varphi \frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}} - f \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{n}}] dO.$$

Volumenintegral

Transformationsformel

Volumen von Normalbereichen

Analysis III

Satz von Gauß

Einführung und Grundbegriffe